

UNIVERSITÀ DEL SALENTO

FACOLTÀ DI ECONOMIA

Laurea in ECONOMIA E FINANZA

Appunti di

Matematica generale

(Corso da 8 CFU)

Donato Scolozzi

A.A. 2012/13

Informazioni legali: Questi appunti sono prodotti in proprio con il metodo Xerox presso il Dipartimento di Scienze Economiche e Matematico-Statistiche dell'Università del Salento. Sono stati adempiuti gli obblighi previsti dal D.L.L.31/8/1945 n.660 riguardanti le pubblicazioni in proprio.

Nota: Questo libro viene rilasciato gratuitamente agli studenti dell'Università del Salento, ed a tutti quelli che fossero interessati agli argomenti trattati, mediante Internet.

L'autore concede completa libertà di riproduzione (ma non di modifica) del presente testo per soli scopi personali e/o didattici, ma non a fini di lucro.

Indirizzo dell'autore:

Donato Scolozzi

Università del Salento, Facoltà di Economia, Complesso Ecotekne,

via per Monteroni, 73100 Lecce

donato.scolozzi@unisalento.it

PREFAZIONE

Nel presente fascicolo sono state raccolti alcuni degli argomenti presentati dall'autore nel tempo nei corsi di Matematica Generale del corso di laurea in Economia e Commercio della laurea quadriennale del vecchio ordinamento e della attuale laurea triennale in Economia e Finanza.

La normativa vigente, dedicando troppo poco tempo all'insegnamento della materia, non permette alcun approfondimento, ed anzi obbliga ad escludere dai programmi argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili.

E' stato quindi ritenuto indispensabile, pur con tale riduzione dei contenuti, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica tipici della Matematica.

Degli argomenti presentati una parte fa riferimento all'attuale programma svolto nel corso di lezioni, il resto cerca di completare l'esposizione aggiungendo qualche ulteriore approfondimento. Nell'intenzione dell'autore esso è dedicato a chi ha interesse ad approfondire la sua formazione iniziale universitaria in questa disciplina magari con l'intento di utilizzarla in seguito nella propria attività di insegnamento o di ricerca. Gli argomenti sufficienti alla preparazione di base ed a sostenere e superare l'esame sono indicati di volta in volta nel programma del corso che il docente presenta agli studenti all'inizio dell'anno accademico.

INDICE

1	Gli Insiemi	1
1.1	Cenni di teoria degli insiemi.	1
1.2	Operazioni tra sottoinsiemi di un insieme.	3
1.3	Prodotto cartesiano di insiemi e definizione di funzione	4
2	I Numeri Reali	10
2.1	Introduzione assiomatica dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$	10
2.2	L'insieme ampliato dei numeri reali e gli intervalli.	14
2.3	Estremo inferiore ed estremo superiore di un insieme di numeri reali	15
2.4	Metrica e topologia euclidea in $\mathbb{R}$	19
3	Funzioni reali di variabile reale	23
3.1	Funzioni monotone.	23
3.2	Funzioni convesse	25
3.3	Funzioni elementari	31
4	Il limite di una funzione	42
4.1	Limite di una funzione e prime proprietà.	42
4.2	Teoremi sulle operazioni.	46
4.3	Teoremi di esistenza dei limiti	54
4.4	Massimo limite e minimo limite di una funzione	62
5	La continuità	65
5.1	Funzioni continue	65
5.2	Funzioni uniformemente continue	74
6	La derivata	77
6.1	Derivate: definizione, proprietà e significato geometrico.	77
6.2	Regole di derivazione e derivate delle funzioni elementari.	82
6.3	Derivabilità e monotonia.	91
6.4	I teoremi di L'HOSPITAL.	98
6.5	La formula di TAYLOR.	103
6.6	Derivabilità e convessità-concavità.	109
7	L'Integrale di RIEMANN.	114
7.1	Definizione dell'integrale di Riemann	114
7.2	Alcune condizioni sufficienti di integrabilità.	119

8	Serie numeriche	130
8.1	Serie numeriche	130
8.2	Serie numeriche con termini segno costante	135
8.3	Serie numeriche con termini di segno alterno.	143
8.4	Serie numeriche con termini di segno qualunque	144
9	Funzioni di due variabili	146
9.1	Limite di una funzioni di due variabili.	146
9.2	Funzioni continue.	148
9.3	Derivate parziali.	150
9.4	Massimi e minimi relativi interni.	163
9.5	Massimi e minimi vincolati.	167

CAPITOLO 1

GLI INSIEMI

1.1 Cenni di teoria degli insiemi.

Assumiamo come primitiva la nozione di insieme.

Indicheremo spesso gli insiemi mediante le lettere maiuscole dell'alfabeto: $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$. Anche il concetto di elemento sarà assunto come primitivo, essi saranno indicati mediante le lettere minuscole dell'alfabeto: $a, b, c, \dots, x, y, \dots$.

Per indicare che un elemento x appartiene ad un insieme X scriveremo $x \in X$, mentre per indicare che x non è elemento di X scriveremo $x \notin X$.

Per individuare un insieme X occorre anzitutto assegnare un *insieme universo* U al quale appartengono gli elementi di X . Per indicare poi quest'ultimo normalmente si procede in due modi.

Uno prevede che gli elementi dell'insieme siano elencati; questo procedimento è molto utile nel caso di insiemi formati da un numero finito di elementi. In tal caso l'insieme X si indica nel modo seguente: $X = \{a, b, c, \dots\}$. L'altro modo, che può utilizzare anche quando X non ha un numero finito di elementi, consiste nell'assegnare la proprietà P che essi devono verificare. In simboli si scrive: $X = \{x \in U : x \text{ soddisfa } P\}$.

Postuliamo poi l'esistenza di un insieme che è privo di elementi, che si dirà l'insieme vuoto e che si denoterà con il simbolo $\emptyset$.

Definizione 1.1.1 (Definizione di sottoinsieme) *Dati due insiemi A ed X diremo che A è una parte di X , oppure che A è un sottoinsieme di X , se e solo se tutti gli elementi di A sono anche elementi di X oppure se $A = \emptyset$. In simboli per dire che A è una parte di X scriveremo $A \subseteq X$.*

Quindi dalla definizione precedente si deduce che l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme X ; inoltre è ovvio dalla definizione che X è sottoinsieme di se stesso; ne segue allora che un insieme X non vuoto ha almeno due sottoinsiemi che sono X stesso e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Definizione 1.1.2 *Due insiemi X ed Y si dicono uguali o coincidenti, e si scrive $X = Y$ se e solo se risulta $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.*

Ha senso, dato un insieme X , considerare la classe di tutti i suoi sottoinsiemi. Essa è ancora un insieme e si indica con $P(X)$. Pertanto si ha $A \subseteq X$ se e solo se $A \in P(X)$.

È opportuno ora prendere in esame alcuni simboli logici che ricorreranno frequentemente nel seguito.

Utilizzeremo due quantificatori: quello universale, che sarà indicato con il simbolo $\forall$, e che significa per ogni oppure qualunque e quello esistenziale, che sarà indicato con il simbolo $\exists$,

e che significa esiste almeno un. Qualche altra volta sarà utile far seguire al quantificatore esistenziale l'indicazione che l'oggetto che si vuole prendere in considerazione è anche unico; in tal caso si scriverà $\exists!$, facendo seguire una sbarretta verticale al simbolo del quantificatore.

Utilizzeremo anche il simbolo di implicazione, che sarà denotato con $\Rightarrow$, e quello di equivalenza logica o coimplicazione che sarà indicato con $\Leftrightarrow$.

Questi connettivi logici spesso legano due proprietà P e Q ; e allora quando scriveremo $P \Rightarrow Q$ vorremo indicare che nel caso in cui è vera la proprietà P allora è anche vera la proprietà Q . Nel caso invece la proprietà P è falsa scriveremo ancora $P \Rightarrow Q$ volendo dire che l'implicazione è vera sia nel caso in cui la proprietà Q è vera e sia nel caso in cui la proprietà Q è falsa.

Se poi, nonostante sia vera la proprietà P , è falsa la proprietà Q scriveremo $P \not\Rightarrow Q$; in tal caso diremo che la proprietà P non implica la proprietà Q .

Il caso in cui, infine, scriveremo $P \Leftrightarrow Q$ allora significa che le proprietà P e Q sono logicamente equivalenti e cioè che la proprietà P implica la proprietà Q e la proprietà Q implica la proprietà P . Spesso questo connettivo logico si chiama anche caratterizzazione.

È possibile infine rileggere in termini di insiemi i legami logici precedenti. In particolare se è assegnato un insieme X e se sono assegnate due proprietà P e Q si possono considerare i due sottoinsiemi A e B di X che soddisfano le proprietà P e Q rispettivamente. Cioè: $A = \{ x \in X \mid x \text{ verifica } P \}$ e $B = \{ x \in B \mid x \text{ verifica } Q \}$.

Allora dire che A è una parte di B , cioè $A \subseteq B$, è come dire, in termini di proprietà, che $P \Rightarrow Q$. Mentre dire che i due sottoinsiemi coincidono, cioè $A = B$, è come dire che $P \Leftrightarrow Q$ cioè che le due proprietà sono logicamente equivalenti.

Un'ultima osservazione, riguardante il connettivo di implicazione tra due proprietà P e Q , è utile perchè nel seguito la scrittura $P \Rightarrow Q$ rappresenterà lo schema logico di un teorema.

Infatti, in questo schema, la proprietà P si dice essere l'ipotesi mentre la proprietà Q assume il ruolo di tesi, e l'implicazione che lega logicamente queste le proprietà dice in sostanza che la proprietà P è più forte della proprietà Q .

Infine occorre osservare che una implicazione è vera se si verifica uno dei seguenti tre casi:

P è vera e Q è vera

P è falsa e Q è vera

P è falsa e Q è falsa.

La stessa implicazione $P \Rightarrow Q$ si dice che è falsa nella seguente eventualità:

P è vera e Q è falsa

.

Nel seguito utilizzeremo anche il simbolo $:$ oppure il simbolo $|$ per dire tale che. Inoltre faremo largo uso dei seguenti connettivi logici binari: e, congiunzione; o, disgiunzione; non, negazione.

1.2 Operazioni tra sottoinsiemi di un insieme.

Assegnato un insieme X e due sottoinsiemi A e B , quindi $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$, possiamo costruire mediante A e B altri sottoinsiemi di X ricorrendo alle operazioni di unione, di intersezione, di differenza o complementare e di differenza simmetrica.

Definizione 1.2.1 (UNIONE) *L'unione di due sottoinsiemi A e B di X è un sottoinsieme di X denotato con $A \cup B$ ed è formato dagli elementi x di X che stanno in A oppure in B (senza escludere l'eventualità che stiano in A ed in B contemporaneamente). In simboli si ha:*

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Definizione 1.2.2 (INTERSEZIONE) *L'intersezione di due sottoinsiemi A e B di X è ancora un sottoinsieme di X denotato con $A \cap B$ ed è costituito dagli elementi x di X che stanno sia in A e sia in B . In simboli si ha:*

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Definizione 1.2.3 (DIFFERENZA o COMPLEMENTARE) *Il complementare di B rispetto ad A è ancora un sottoinsieme di X che denotiamo con $A \setminus B$ e che è formato dagli elementi di X che appartengono ad A e che non appartengono a B . In simboli si ha:*

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Definizione 1.2.4 (DIFFERENZA SIMMETRICA) *La differenza simmetrica di A con B è ancora un sottoinsieme di X che indichiamo con $A \Delta B$ e che è formato dagli elementi di X che stanno in $A \setminus B$ oppure stanno in $B \setminus A$. In simboli*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

.

Come si è appena visto le operazioni ora descritte agiscono nell'insieme delle parti di X , cioè nell'insieme di tutti i sottoinsiemi di X , ed hanno come risultato ancora un sottoinsieme di X .

Le precedenti operazioni godono delle seguenti proprietà:

Teorema 1.2.1 *Per ogni terna di sottoinsiemi A , B , C di X si ha:*

1. $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (proprietà commutativa)
2. $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$ (proprietà di idempotenza)
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (proprietà distributive di una operazione rispetto all'altra)
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ e $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$ (formule di DE MORGAN).

Delle quattro operazioni su sottoinsiemi di un insieme dato X descritte prima solo le operazioni di unione e di intersezione si possono estendere a più di due sottoinsiemi.

In particolare esse si possono estendere ad una famiglia qualunque di sottoinsiemi di X . Quindi se $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$, cioè se $\mathcal{F}$ è una famiglia di parti di X , è possibile

definire un sottoinsieme di X mediante l'operazione di unione, tale sottoinsieme si indica con $\cup_{A \in \mathcal{F}} A$. Tale insieme è formato da tutti gli elementi di X che stanno in almeno un elemento di $\mathcal{F}$.

In simboli si ha $\cup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{F} : x \in A\}$.

Analogamente all'operazione di unione si può definire l'intersezione degli elementi della famiglia $\mathcal{F}$. In simboli si ha: $\cap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X \mid x \in A \quad \forall A \in \mathcal{F}\}$.

Concludiamo il paragrafo introducendo le nozioni di ricoprimento e di partizione di un insieme.

Assegnato un insieme X , una sua parte Y , quindi $Y \subseteq X$, ed una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X , cioè $\mathcal{F} \subseteq P(X)$, diremo che $\mathcal{F}$ costituisce un ricoprimento per Y se e solo se $Y \subseteq \cup_{A \in \mathcal{F}} A$.

Diremo poi che $\mathcal{F}$ costituisce una partizione per Y se e solo se

$$Y = \cup_{A \in \mathcal{F}} A \quad \text{e} \quad \forall A, B \in \mathcal{F} \text{ con } A \neq B \text{ si ha } A \cap B = \emptyset$$

cioè l'unione degli elementi di $\mathcal{F}$ coincide con Y e inoltre gli stessi elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti.

1.3 Prodotto cartesiano di insiemi e definizione di funzione

Mediante due insiemi X ed Y assegnati nell'ordine è possibile costruire un terzo insieme, il prodotto cartesiano $X \times Y$, i cui elementi sono chiamati coppie ordinate e sono indicati con (x, y) dove $x \in X$ ed $y \in Y$. In questo tipo di operazione è molto importante l'ordine con cui vengono assegnati gli insiemi X ed Y . La coppia ordinata (x, y) si può definire nel modo seguente.

Definizione 1.3.1 (Definizione di coppia ordinata) *Dati due elementi $x \in X$ ed $y \in Y$ si definisce coppia ordinata formata da x ed y il seguente insieme:*

$$(x, y) =_{def} \{x, \{x, y\}\}$$

Quindi una coppia ordinata è in realtà un insieme formato da due elementi di cui uno è il primo elemento x della coppia e l'altro è a sua volta un altro insieme i cui elementi sono i due elementi x ed y della coppia. Per questo motivo x prende il nome di prima coordinata ed y prende il nome di seconda coordinata. A volte si dice anche che x rappresenta l'ascissa ed y rappresenta l'ordinata della coppia. Per la definizione precedente si può verificare che date due coppie ordinate (x, y) ed (u, v) si ha:

$$(x, y) = (u, v) \iff (x = u \quad \text{ed} \quad y = v)$$

cioè due coppie ordinate coincidono se e solo se le ascisse coincidono tra loro e le ordinate coincidono tra loro. Sempre in virtù della definizione precedente è possibile definire formalmente il prodotto cartesiano $X \times Y$ dato da due insiemi X ed Y ponendo:

$$X \times Y = \{ z \in \mathcal{P}(X \cup \mathcal{P}(X \cup Y)) \mid (\exists x \in X, \exists y \in Y : z = \{x, \{x, y\}\}) \}$$

È opportuno osservare che se è $X = Y$ allora il prodotto cartesiano $X \times Y$ si suole indicare con X^2 .

Assegnati tre insiemi nell'ordine X, Y, Z è possibile definire il prodotto cartesiano $X \times Y \times Z$ iterando il prodotto cartesiano di due insiemi.

Si può allora porre: $X \times Y \times Z = X \times (Y \times Z)$.

Gli elementi del prodotto cartesiano $X \times Y \times Z$ sono detti terne ordinate e si indicano con (x, y, z) . Brevemente allora si pone:

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) | x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

.

In modo analogo si può procedere se sono assegnati nell'ordine una quantità finita, per esempio n , di insiemi $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Gli elementi del prodotto cartesiano $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$, il quale può anche essere brevemente indicato con il simbolo $\prod_{k=1}^n X_k$, si indicano con il simbolo $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e si chiamano ennuple ordinate di elementi.

Quindi si può porre:

$$\prod_{k=1}^n X_k = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Possiamo ora considerare il concetto di funzione.

Definizione 1.3.2 (di funzione) *Dati due insiemi X ed Y non vuoti si dice che è definita una funzione f su X ed a valori in Y , e si scrive $f : X \rightarrow Y$, se e solo se è assegnata una relazione f che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno ed un solo elemento $y \in Y$ che si dice legato ad x tramite f e si scrive $y = f(x)$. In simboli si ha:*

$$(f : X \rightarrow Y \text{ è funzione}) \iff_{def} (\forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)).$$

Ne segue allora che una funzione è individuata da tre elementi che sono l'insieme di definizione X , l'insieme di arrivo Y , la relazione f che lega gli elementi di X agli elementi di Y . È possibile allora affermare che una funzione è rappresentata da una terna ordinata del tipo (X, Y, f) in cui la prima coordinata X è l'insieme di definizione, la seconda coordinata Y è l'insieme di arrivo e la terza coordinata è la relazione f . Qualche volta, quando non ci sono equivoci sul discorso e si conoscono sia l'insieme di definizione e sia l'insieme di arrivo, si suole indicare la funzione soltanto con la relazione f .

Da quanto detto date due funzioni (X, Y, f) e (Z, T, g) diciamo che coincidono se e solo se le due terne ordinate coincidono: $(X, Y, f) = (Z, T, g)$, cioè se e solo se $X = Z$, $Y = T$, $f = g$ e cioè se e solo se $X = Z$, $Y = T$ e $\forall x \in X = Z$ si ha: $f(x) = g(x)$.

Nel seguito però, come si è già fatto nella definizione, indicheremo una funzione non come terna ordinata ma con il simbolo $f : X \rightarrow Y$.

Definizione 1.3.3 (grafico di una funzione) *Una funzione $f : X \rightarrow Y$ individua un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$ che prende il nome di grafico della funzione f e viene indicato con G_f . Tale insieme è definito dalla seguente posizione: $G_f = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$.*

Dalla definizione di funzione si può vedere che tutte le ascisse $x \in X$ sono coinvolte dalla relazione f mentre in generale non è detto che siano coinvolte tutte le ordinate $y \in Y$. Inoltre sempre nella definizione non è detto se le ascisse x sono trasformate ad esempio tutte in una sola y oppure se ad ascisse distinte si fanno corrispondere ordinate distinte. Per distinguere le varie situazioni che si possono verificare consideriamo alcune definizioni.

Definizione 1.3.4 (immagine di una funzione) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione e sia $A \subseteq X$, l'insieme $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$, che è un sottoinsieme di Y , è detto immagine di A tramite f . Se $A = X$ allora $f(X)$ si dice l'immagine di f .

Si può dire quindi che $f(X)$ è l'insieme di tutte le $y \in Y$ che effettivamente vengono coinvolte dalla relazione f . Evidentemente si ha $f(A) \neq \emptyset \iff A \neq \emptyset$.

Se $f(X)$ è formato da un solo elemento y_o , cioè se risulta $f(X) = \{y_o\}$, allora si dirà che f è una funzione costante e qualche volta con abuso di linguaggio e se non ci sono equivoci si può confondere la relazione f con y_o .

Definizione 1.3.5 (funzione surgettiva, o suriettiva, o su) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice surgettiva se e solo se si ha: $f(X) = Y$.

Cioè f è surgettiva quando l'immagine $f(X)$ di f coincide con l'insieme di arrivo Y . Evidentemente questo si ha quando tutti gli elementi di Y sono coinvolti dalla relazione f . Allora si può anche dire che f è surgettiva se e solo se per ogni elemento $y \in Y$ esiste almeno un elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$.

In simboli si ha:

$$(f : X \rightarrow Y \text{ è surgettiva}) \iff (\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)).$$

Ovviamente una funzione costante $f : X \rightarrow Y$ è surgettiva se e solo se Y ha un solo elemento.

Definizione 1.3.6 (funzione iniettiva, o iniettiva, o in) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice iniettiva se e solo se ad ascisse distinti di X corrispondono ordinate distinte di Y .

In simboli si ha:

$$(f : X \rightarrow Y \text{ è iniettiva}) \iff_{def} (\forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Una funzione costante f definita su un insieme X con almeno due elementi distinti tra loro non è iniettiva.

Vale la seguente equivalenza logica:

Teorema 1.3.1 $(f : X \rightarrow Y \text{ è iniettiva}) \iff (\forall x_1, x_2 \in X \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$

Le due definizioni di funzione surgettiva e di funzioni iniettiva sono indipendenti tra loro. Vedremo infatti, ad esempio quando considereremo funzioni reali di una variabile reale, che ci sono funzioni che sono surgettive ma non sono iniettive e ci sono funzioni che sono iniettive ma che non sono surgettive. Vedremo infine funzioni che non sono nè iniettive nè surgettive.

Definizione 1.3.7 (funzione bigettiva, o biiettiva) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è bigettiva se e solo se essa è surgettiva e iniettiva.

Vale la seguente caratterizzazione della proprietà di bigettività. Essa preannuncia l'impostazione formale di equazione e di soluzione di una equazione.

Teorema 1.3.2 $f : X \rightarrow Y$ è *bigettiva* $\iff (\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x))$.

Dimostrazione. Sia f bigettiva e sia $y \in Y$, poichè f è surgettiva esiste $x_1 \in X$ tale che $y = f(x_1)$. Per verificare che tale ascissa x_1 è unica sia x_2 tale che $y = f(x_1) = f(x_2)$. Poichè f è iniettiva si ha $x_1 = x_2$.

Viceversa è ovvio che f è surgettiva. Per verificare che f è anche iniettiva siano $x_1, x_2 \in X$ tale che $f(x_1) = f(x_2) = y$. Poichè però per ipotesi l'ascissa deve essere unica si ha $x_1 = x_2$. $\diamond$

La caratterizzazione appena provata permette di considerare la proprietà a destra del simbolo di equivalenza logica. Essa permette di considerare a partire dalla funzione f una nuova funzione

$$g : Y \rightarrow X$$

definita dalla seguente proprietà:

$$\forall y \in Y \quad g(y) = x \iff f(x) = y.$$

In questo modo i ruoli delle variabili si scambiano quando si passa dalla funzione f alla funzione g appena considerata: quelle che sono indipendenti per f ora sono dipendenti per g e inoltre quelle che erano dipendenti per f ora sono indipendenti per g .

Si può verificare facilmente che la funzione g definita nel modo precedente tramite la funzione f è unica e che è anche bigettiva. Per questo stretto legame esistente tra la f assegnata e la g ottenuta, si usa dare a g un simbolo che ricorda la stessa f , ponendo $g = f^{-1}$. Quanto ora detto consente di dare la seguente definizione di funzione inversa.

Definizione 1.3.8 (funzione inversa) Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ che sia anche bigettiva diciamo *funzione inversa di f* la funzione $f^{-1} : Y \rightarrow X$ definita dalla relazione: $\forall y \in Y \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Poichè f^{-1} risulta essa stessa bigettiva, essa è a sua volta invertibile e, si può dimostrare che, la sua inversa è esattamente f , cioè $(f^{-1})^{-1} = f$.

Definizione 1.3.9 (funzione composta) Assegnati tre insiemi X, Y e Z e due funzioni $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, ha senso costruire una terza funzione, che si indica con $g \circ f$. Essa ha X come insieme di definizione, Z come insieme di arrivo, $g \circ f : X \rightarrow Z$, ed è definita dalla seguente relazione: $\forall x \in X \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Quindi se x è ascissa per f , allora $f(x)$ è contemporaneamente ordinata per f ed ascissa di g , l'ordinata per g valutata sull'elemento $f(x)$, cioè $g(f(x))$, rappresenta il corrispondente di x tramite la funzione composta $g \circ f$. È evidente, da come è definita, che la funzione composta da g e da f , $g \circ f$, si ottiene facendo operare nell'ordine la funzione f e poi la funzione g .

Il procedimento di composizione si può naturalmente estendere al caso di più di due funzioni. Ad esempio se sono assegnate tre funzioni: $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow T$ si può considerare una quarta funzione, $h \circ g \circ f : X \rightarrow T$, ottenuta componendo nell'ordine le tre funzioni assegnate, e definita nel modo seguente: $\forall x \in X \quad (h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$. Analoga l'estensione al caso di più di tre funzioni.

Teorema 1.3.3 Date le funzioni $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ si consideri la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$. Si ha:

1. f e g ingettive $\Rightarrow g \circ f$ ingettiva.

2. f e g surgettive $\Rightarrow g \circ f$ surgettiva.

3. f e g bigettive $\Rightarrow g \circ f$ bigettiva e si ha $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dimostrazione. 1) Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Poichè g è iniettiva si ha $f(x_1) = f(x_2)$ e quindi, poichè f è iniettiva, $x_1 = x_2$.

2) Sia $z \in Z$ poichè g è surgettiva esiste $y \in Y$ tale che $z = g(y)$. Inoltre poichè f è surgettiva esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$. Quindi $z = g(f(x))$.

3) segue da 1) e da 2). $\diamond$

È utile a questo punto, usando la nozione di funzione composta, approfondire ulteriormente il legame che c'è tra una funzione bigettiva e la sua funzione inversa.

Sia allora $f : X \rightarrow Y$ una funzione bigettiva e sia $f^{-1} : Y \rightarrow X$ la sua funzione inversa. Abbiamo già notato che risulta: $\forall y \in Y \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Da queste proprietà si ha allora: $f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in X$ ed $f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in Y$. Rileggendo le precedenti relazioni in termini di funzioni composte si ha:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X$$

ed

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in Y.$$

È possibile ora interpretare i secondi membri delle precedenti due uguaglianze in termini di funzioni. Infatti è possibile considerare una particolare funzione definita in X ed a valori ancora in X , detta funzione identica di X e che indichiamo con I_X , definita nel modo seguente:

$$I_X : X \rightarrow X \quad \forall x \in X \quad I_X(x) = x$$

cioè I_X non trasforma le sue ascisse. Ne segue allora che si può scrivere

$$(f^{-1} \circ f)(x) = I_X(x) \quad \forall x \in X$$

e questo per definizione di coincidenza tra due funzioni, vuol dire che:

$$f^{-1} \circ f = I_X.$$

In modo analogo si può leggere l'altra uguaglianza ottenendo $f \circ f^{-1} = I_Y$.

È utile ora tornare alle immagini dirette e alle immagini reciproche di una funzione, cercandone il collegamento con le operazioni di unione, intersezione e differenza tra sottoinsiemi di un insieme dato.

Teorema 1.3.4 *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \forall A, B \subseteq X$.
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subseteq X$.
3. f iniettiva $\iff f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subseteq X$.
4. $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B) \quad \forall A, B \subseteq X$.

È possibile definire anche l'immagine reciproca di una parte dell'insieme di arrivo.

Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione e si A un sottoinsieme di Y . Si definisce immagine reciproca mediante f di A il sottoinsieme di X definito nel modo seguente:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid \exists y \in A : y = f(x)\}.$$

Si noti che in questa definizione f^{-1} è semplicemente un simbolo che viene usato per definire l'immagine reciproca e non è la funzione inversa di f , anche perchè non è detto che f sia invertibile. Anzi f può non essere nè iniettiva nè surgettiva. Il simbolo usato è però significativo perchè nel caso f è anche invertibile allora $f^{-1}(A)$ rappresenta contemporaneamente l'immagine reciproca tramite f di $A \subseteq Y$ e inoltre rappresenta l'immagine diretta di $A \subseteq Y$ tramite la funzione f^{-1} inversa di f . Per le immagini reciproche vale il seguente risultato:

Teorema 1.3.5 *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subseteq Y.$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subseteq Y.$
3. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subseteq Y.$

Concludiamo questo paragrafo dando due definizioni.

Definizione 1.3.10 (restrizione di una funzione) *Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ e considerato $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ resta definita la funzione $i : A \rightarrow X$ dalla relazione $i(x) = x \quad \forall x \in A$ detta funzione di inclusione di A in X . La funzione composta $f \circ i : A \rightarrow Y$ si dice restrizione di f ad A e si indica con $f|_A = f \circ i$.*

Definizione 1.3.11 (ridotta di una funzione) *Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ e considerato $T \subseteq Y$ e con $f(X) \subseteq T$ si può considerare una nuova funzione $g : X \rightarrow T$, utilizzando ancora la relazione f assegnata, nel modo seguente $g(x) = f(x) \forall x \in X$. La nuova funzione g ottenuta si chiama la ridotta di f all'insieme T .*

Quando non c'è pericolo di confusione la funzione ridotta si suole indicare ancora con $f : X \rightarrow T$, visto che non sono cambiati nè l'insieme di definizione nè la relazione ma soltanto l'insieme di arrivo: dall'insieme Y si passa ad un suo sottoinsieme opportuno T per il quale però vale anche la seguente proprietà di inclusione: $f(X) \subseteq T$.

Si osservi infine che considerando la restrizione o la ridotta di una funzione si cambia nel primo caso solo l'insieme di definizione e nel secondo caso solo l'insieme di arrivo di una funzione. Quindi si ottiene comunque una funzione che è diversa dalla precedente funzione assegnata.

CAPITOLO 2

I NUMERI REALI

2.1 Introduzione assiomatica dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$

Ci sono vari modi per introdurre l'insieme, che indicheremo con $\mathbb{R}$, dei numeri reali. Considereremo in questa esposizione la forma assiomatica. Essa consente di esporre quelle proprietà che sembrano essenziali senza dover necessariamente ricorrere a molte dimostrazioni. Non sembra infatti utile in questa trattazione introdurre $\mathbb{R}$ facendo ricorso alla versione costruttiva. In tal caso infatti, volendo essere completi almeno nella esposizione, sarebbe necessario partire dai numeri naturali $\mathbb{N}$ per poi passare a quello dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e quindi ai numeri razionali $\mathbb{Q}$ per poi ottenere $\mathbb{R}$. Evidentemente, se si privilegiasse questo secondo percorso, sarebbe comunque necessario introdurre i numeri naturali ovviamente in forma assiomatica per poi passare agli altri insiemi attraverso le varie definizioni e proprietà. Tale percorso, fatto in modo rigoroso e sistematico, sembra troppo lungo ed esula comunque dagli scopi di questa esposizione.

L'introduzione in forma assiomatica di $\mathbb{R}$ necessita della presentazione degli assiomi riguardanti l'addizione, la moltiplicazione, la relazione d'ordine e la proprietà di completezza.

Definizione 2.1.1 (ADDIZIONE) *In $\mathbb{R}$ è definita una legge di composizione interna, chiamata addizione, che $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associa uno ed un solo elemento $s \in \mathbb{R}$ che viene indicato con $x + y$, si pone allora $s = x + y$ e si dice che l'elemento s è la somma di x con y .*

In sostanza quindi è definita una funzione $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Questa operazione interna soddisfa le seguenti proprietà:

1) Proprietà associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

2) Esistenza dell'elemento neutro: $\exists u \in \mathbb{R} : u + x = x + u = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

l'elemento u si dice neutro rispetto alla operazione di addizione, sarà verificato successivamente che esso è unico, di solito si indica con 0: $u = 0$.

3) Esistenza dell'elemento simmetrico: $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = y + x = u = 0$;

sarà verificato che y è unico; per questo si pone $y = -x$ e si dice che y è l'elemento opposto di x , o il simmetrico, rispetto all'addizione.

4) Proprietà commutativa: $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Unicità dell'elemento neutro: siano u e v elementi neutri rispetto all'addizione, risulta allora $u = u + v = v$.

Unicità dell'elemento simmetrico: siano y e t elementi simmetrici dello stesso elemento x , risulta allora $y = y + 0 = y + (x + t) = (y + x) + t = 0 + t = t$, quindi è $y = t$.

Definizione 2.1.2 (MOLTIPLICAZIONE) In $\mathbb{R}$ è definita una legge di composizione interna, chiamata *moltiplicazione*, che $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associa uno ed un solo elemento $p \in \mathbb{R}$ che viene indicato nel modo seguente: $p = xy$. L'elemento $p = xy$ si dice il prodotto di x con y .

Risulta quindi definita una funzione $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Questa operazione interna verifica le seguenti proprietà:

1. Proprietà associativa: $x(yz) = (xy)z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Esistenza dell'elemento neutro: $\exists v \neq 0 : xv = vx = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Sarà provato che v è unico, v quindi si dice elemento neutro rispetto alla moltiplicazione e si indica di solito con 1, $v = 1$.
4. Esistenza dell'elemento simmetrico: $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R} : xy = yx = 1$ Sarà provato che, per ogni elemento x fissato, l'elemento y è unico. In tal caso si pone di conseguenza $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$; y si dice elemento simmetrico di x rispetto alla moltiplicazione.
5. Proprietà commutativa: $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Unicità dell'elemento neutro: siano v e w con $v \neq 0$ e con $w \neq 0$ elementi neutri rispetto alla moltiplicazione, si ha per questo $v = vw = w$.

Unicità dell'elemento simmetrico: dato $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, siano $y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ elementi simmetrici di x rispetto alla moltiplicazione, si ha allora $y = 1y = (tx)y = t(xy) = t1 = t$; quindi $y = t$.

Vale inoltre la seguente proprietà distributiva che lega tra loro le due operazioni interne appena considerate:

Proprietà distributiva: $(x + y)z = xz + yz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Si noti il legame che c'è tra le due operazioni in $\mathbb{R}$ appena considerate. Le proprietà sono molto simili tra loro (proprietà associativa e commutativa, esistenza degli elementi neutro e simmetrico rispetto ad entrambi le operazioni).

Un primo assioma che le distingue è quello che afferma che l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione è diverso da quello rispetto alla addizione. Infatti se i due elementi neutri coincidessero allora l'insieme $\mathbb{R}$ sarebbe ridotto ad un solo elemento (quello neutro appunto). Infatti se fosse $1 = 0$ si avrebbe: per ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ $x = x1 = x0 = 0$, cioè $x = 0$ e pertanto $\mathbb{R}$ avrebbe un solo elemento: $\mathbb{R} = \{0\}$.

Un secondo assioma che distingue le due operazioni è quello che afferma l'esistenza dell'elemento simmetrico di un assegnato elemento x rispetto alla moltiplicazione, purchè però questo elemento x sia diverso dall'elemento neutro, 0, rispetto alla prima operazione cioè rispetto alla addizione.

Da questa affermazione segue che 0 non ha elemento simmetrico rispetto alla moltiplicazione. In termini pratici questo si traduce nel fatto che non ha senso dividere per zero, cioè non ha senso ad esempio l'operazione $\frac{1}{0}$.

L'ultima proprietà distributiva lega operativamente le due operazioni tra loro. L'insieme $\mathbb{R}$ con l'operazione di addizione prende il nome di gruppo abeliano o commutativo; se poi in $\mathbb{R}$ consideriamo anche la moltiplicazione allora la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ prende il nome di corpo commutativo o campo.

Legge di annullamento del prodotto:

- 1) $x0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- 2) Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $y = 0$.

Infatti: $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0 \Rightarrow 0 = x0$; inoltre per verificare la 2) sia $x \neq 0$ con $xy = 0$, devo verificare che è $y = 0$. Si ha: $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1y = y$, inoltre si ha $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$ e quindi risulta la tesi, cioè $y = 0$.

Definizione 2.1.3 (RELAZIONE D'ORDINE) In $\mathbb{R}$ è definita una relazione $\leq$ (minore o uguale) che è di ordine totale, cioè tale relazione soddisfa le seguenti proprietà:

1. Proprietà riflessiva: $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Proprietà antisimmetrica: $x \leq y$ ed $y \leq x \Rightarrow x = y$;
3. Proprietà transitiva: $x \leq y$ ed $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;
4. Ordine totale: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$.

Inoltre la relazione $\leq$ soddisfa le seguenti proprietà di compatibilità con le operazioni di addizione e di moltiplicazione.

1. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
2. $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ con $0 \leq z$.

L'insieme $\mathbb{R}$ con le due operazioni di addizione e di moltiplicazione e con la relazione d'ordine precedentemente considerata si dice che individua un campo totalmente ordinato. Sinteticamente si dice che la quaterna ordinata $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo totalmente ordinato.

In $\mathbb{R}$ è possibile definire anche un ordinamento stretto nel modo seguente:

$$x < y \iff_{def} x \leq y \text{ ed } x \neq y.$$

Converremo, nel seguito, anche di scrivere $x \geq y$ in luogo di $y \leq x$, e anche $x > y$ in luogo di $y < x$.

La relazione d'ordine permette di individuare alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali non negativi $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$, l'insieme dei numeri reali positivi $\mathbb{R}_*^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Consideriamo ora alcune proprietà elementari:

1. $x \geq 0 \iff -x \leq 0$
infatti $x \geq 0 \iff x + (-x) \geq 0 + (-x) \iff 0 \geq 0 + (-x) = -x$.

$$2. \ x \leq y \iff y - x \geq 0$$

$$\text{infatti } x \leq y \iff x - y \leq y - y \iff x - y \leq 0 \iff y - x \geq 0.$$

$$3. \ x \leq y, z \leq 0 \implies xz \geq yz$$

$$\text{infatti } x \leq y, z \leq 0 \implies x \leq y, -z \geq 0 \implies x(-z) \leq y(-z) \implies -xz \leq -yz \implies xz - yz \geq 0 \implies xz \geq yz.$$

$$4. \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ risulta } x^2 = xx \geq 0$$

$$\text{infatti } x \geq 0 \implies x^2 = xx \geq 0 \implies x^2 \geq 0, \text{ inoltre } x \leq 0 \implies x^2 = xx \geq 0 \implies x^2 \geq 0.$$

$$5. \ 1 \geq 0 \text{ e quindi } 1 > 0.$$

$$\text{infatti } 1 = 1^2 \geq 0 \text{ per la precedente proprietà 4).}$$

Quello che finora è stato detto per l'insieme dei numeri reali lo si può ripetere per l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ senza che si noti una differenza tra le due strutture ottenute. Infatti si può vedere che anche la quaterna ordinata $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ costituisce un campo totalmente ordinato quando le operazioni di addizione e di moltiplicazione e la relazione d'ordine sono quelle usuali. La proprietà che differenzia l'insieme dei numeri reali dai numeri razionali è l'assioma di completezza. Per poter introdurre questa proprietà occorre considerare una definizione preliminare.

Definizione 2.1.4 (Insiemi separati in $\mathbb{R}$) Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \text{ e } B \text{ si dicono separati} \iff_{\text{def}} (\forall a \in A \text{ e } b \in B \text{ è } a \leq b).$$

Definizione 2.1.5 (Insiemi contigui in $\mathbb{R}$) Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \text{ e } B \text{ si dicono contigui} \iff_{\text{def}} \begin{cases} A \text{ e } B \text{ sono separati e} \\ (\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \exists b \in B : b - a < \varepsilon). \end{cases}$$

Definizione 2.1.6 (ASSIOMA DI COMPLETEZZA) $\mathbb{R}$ è completo. Cioè $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ separati, $\exists x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \ \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$.

L'elemento x , che potrebbe anche essere non unico, si dice elemento separatore tra A e B .

È opportuno osservare subito che $\mathbb{Q}$ non soddisfa questo assioma di completezza. Per verificare questo consideriamo il seguente risultato:

Teorema 2.1.1 $\sqrt{2}$ non è razionale, cioè $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dim.: Supponiamo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ e sia $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e, possiamo supporre, p e q primi tra loro. Ne segue che $p^2 = 2q^2$, quindi p^2 è un numero divisibile per 2 e allora anche p è divisibile per 2, cioè $p = 2k$. Si ha: $p^2 = 4k^2 \iff 4k^2 = 2q^2 \iff q^2 = 2k^2 \iff q = 2h$. Ne segue che p e q non sono primi tra loro.

Si può ancora provare che $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore dei due insiemi: $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 > 2\}$. Quindi queste due parti di $\mathbb{Q}$ non hanno in $\mathbb{Q}$ elemento separatore.

2.2 L'insieme ampliato dei numeri reali e gli intervalli.

È opportuno, per motivi che saranno chiari nel seguito e più in particolare nella teoria dei limiti, ampliare l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali aggiungendo due elementi che ovviamente non sono numeri reali e che sono diversi tra loro. Indicheremo questi elementi con i simboli $-\infty$ e $+\infty$.

Quindi le uniche proprietà formali di questi due elementi sono le seguenti:

$$-\infty \notin \mathbb{R}, \quad +\infty \notin \mathbb{R}, \quad -\infty \neq +\infty$$

Possiamo allora considerare l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

che sarà detta retta reale estesa. Si pone ora il problema di estendere ad $\overline{\mathbb{R}}$ le operazioni interne precedenti e la relazione d'ordine già note in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la relazione d'ordine l'estensione consiste nel porre:

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi anche $\overline{\mathbb{R}}$ risulta totalmente ordinato come $\mathbb{R}$.

Per estendere l'addizione ad $\overline{\mathbb{R}}$ si può procedere ponendo:

$$(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Non si attribuisce risultato alle espressioni $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, che vengono dette forme indeterminate relative all'addizione.

Per quanto riguarda l'estensione della moltiplicazione ad $\overline{\mathbb{R}}$ si hanno le seguenti definizioni:

$$(+\infty)x = x(+\infty) = +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x > 0$$

$$(+\infty)x = x(+\infty) = -\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x < 0$$

$$(-\infty)x = x(-\infty) = -\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x > 0$$

$$(-\infty)x = x(-\infty) = +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x < 0.$$

Non si attribuisce risultato alle espressioni: $(+\infty)0$, $0(+\infty)$, $(-\infty)0$, $0(-\infty)$ che sono dette per questo forme indeterminate relative alla moltiplicazione.

Infine per quanto riguarda la divisione ci sono sostanzialmente due forme indeterminate che sono $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

La forma $\frac{\lambda}{0}$ con $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lambda \neq 0$ non ha senso in accordo con l'assioma sull'esistenza di elemento reciproco rispetto alla moltiplicazione: non esiste il reciproco di 0.

L'estensione ad $\overline{\mathbb{R}}$ della potenza si può fare nel modo seguente:

$$(+\infty)^x = +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x > 0$$

$$(+\infty)^x = 0 \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x < 0$$

$$x^{(+\infty)} = +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x > 1$$

$$x^{(+\infty)} = 0 \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad 0 < x < 1.$$

Non si attribuisce risultato alle forme

$$(+\infty)^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 0^0$$

, che vengono citate come forme indeterminate relative alla potenza.

Siamo ora in grado di definire gli intervalli; dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, si dicono intervalli limitati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Il primo intervallo si dice chiuso mentre il secondo si dice aperto, gli altri due si dicono semiaperti (o semichiusi). Dato $a \in \mathbb{R}$ si dicono intervalli illimitati superiormente i seguenti insiemi: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, che si dice intervallo chiuso, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ che si dice intervallo aperto. In modo analogo si definiscono, dato $a \in \mathbb{R}$, gli intervalli illimitati inferiormente: $] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ che si dice intervallo chiuso, $] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ che si dice intervallo aperto.

Infine, date le precedenti definizioni, si può porre anche $\mathbb{R} =] -\infty, +\infty[$ ed $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

2.3 Estremo inferiore ed estremo superiore di un insieme di numeri reali

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$. Vogliamo definire per X l'estremo inferiore e l'estremo superiore. Per questo daremo prima la definizione di insieme limitato inferiormente o superiormente.

$$(X \text{ si dice limitato inferiormente}) \Leftrightarrow_{def} (\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad a \leq x.)$$

$$(X \text{ si dice illimitato inferiormente}) \Leftrightarrow_{def} (\forall a \in \mathbb{R} \exists x \in X : a > x.)$$

Nel caso che X sia limitato inferiormente è possibile individuare un altro sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che indichiamo con A , i cui elementi a saranno detti minoranti per X ed A sarà detto l'insieme dei minoranti per X .

L'insieme A è definito nel modo seguente: $A = \{a \in \mathbb{R} : a \leq x \forall x \in X\}$.

Evidentemente X è illimitato inferiormente se e solo se si ha $A = \emptyset$. Mentre X è limitato inferiormente se e solo se si ha $A \neq \emptyset$. Vale il:

Teorema 2.3.1 *Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed X limitato inferiormente, sia A l'insieme dei minoranti di X .*

Tesi: $\exists e' \in \mathbb{R} : a \leq e' \leq x \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X$.

Dimostrazione: Per definizione di minorante gli insiemi A ed X sono separati. Per l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$ esiste almeno un numero reale e' che separa A da X , cioè tale che

$$a \leq e' \leq x \quad \forall a \in A \quad \forall x \in X.$$

L'elemento e' è unico.

Infatti se esistessero $e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ con

$$a \leq e_1 \leq x \quad \forall a \in A, \forall x \in X,$$

ed

$$a \leq e_2 \leq x \quad \forall a \in A, \forall x \in X.$$

Si può subito osservare che sia e_1 e sia e_2 sono minoranti per X . Quindi si ha contemporaneamente $e_1 \leq e_2$ e $e_2 \leq e_1$, da cui $e_1 = e_2$. $\diamond$

A questo punto possiamo dare la seguente:

Definizione 2.3.1 (estremo inferiore.) *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$.*

1. *Se X è limitato inferiormente l'unico elemento e' di $\mathbb{R}$ che separa X dall'insieme A dei suoi minoranti si dice estremo inferiore e si denota anche con $\inf X$, $e' = \inf X$. Si ha allora:*

$$\begin{cases} i) a \leq \inf X & \forall a \in A, ; \\ ii) \inf X \leq x & \forall x \in X. \end{cases}$$

2. *Se X è illimitato inferiormente si pone $\inf X = -\infty$.*

(Si noti che in questo caso l'insieme A dei minoranti è vuoto: $A = \emptyset$).

Definizione 2.3.2 (valore minimo) *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$.*

Si dice che X ha elemento minimo se e solo se X è limitato inferiormente e se $\inf X \in X$. In tal caso si pone $\min X = \inf X$.

Esempio 2.3.1 *Assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha:*

$$a = \inf([a, b]) = \inf(]a, b[) = \inf([a, b[) = \inf(]a, b]) = \inf([a, +\infty[) = \inf(]a, +\infty[)$$

e

$$-\infty = \inf(]-\infty, a]) = \inf(]-\infty, a[).$$

Inoltre

$$a = \min([a, b]) = \min([a, b[) = \min([a, +\infty[).$$

Infine risulta:

$$\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1, \quad \inf(\mathbb{Z}) = \inf(\mathbb{Q}) = \inf(\mathbb{R}) = -\infty.$$

Per definire l'estremo inferiore si è fatto uso dei minoranti di X . È possibile però dare una caratterizzazione dell'estremo inferiore mediante gli elementi dell'insieme X attraverso il seguente risultato:

Teorema 2.3.2 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $m \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$m = \inf X \iff \begin{cases} 1) & m \leq x \forall x \in X; \\ 2) & \forall t \in \mathbb{R}, \quad t > m, \quad \exists x \in X : \quad m \leq x < t. \end{cases}$$

Dimostrazione: Sia A l'insieme dei minoranti di X (ovviamente A potrebbe essere anche vuoto). Provo l'implicazione da sinistra verso destra e sia quindi $m \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $m = \inf X$. Per definizione di estremo inferiore si ha: $a \leq m \leq x \forall a \in A \forall x \in X$. Quindi è vera la proprietà 1). Per verificare la 2) procediamo con ragionamento per assurdo e supponiamo che sia falsa. Ne segue che è vera la negazione della 2). Cioè è vero che $\exists \bar{t}, \bar{t} > m : \forall x \in X \bar{t} \leq x$. Quindi l'elemento $\bar{t}$ risulta minorante per X e allora, per definizione di minorante è $\bar{t} \in A$, cioè $\bar{t} \leq m$ che contraddice la condizione $\bar{t} > m$.

Viceversa supponiamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ soddisfi le proprietà 1) e 2); occorre verificare che è $a \leq m \leq x \forall a \in A \forall x \in X$. Di queste proprietà basta allora verificare che è $a \leq m \forall a \in A$. Il caso in cui è $A = \emptyset$ è ovviamente verificato dal momento che A non ha elementi. Sia allora $A \neq \emptyset$, cioè X sia limitato inferiormente e supponiamo, per assurdo, che la proprietà che dobbiamo verificare sia falsa. Allora $\exists \bar{a} \in A : \bar{a} > m$. Per la 2), che è stata supposta vera, esiste $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} < \bar{a}$. Però la relazione $\bar{x} < \bar{a} \bar{x} \in X$ contraddice la proprietà di $\bar{a}$ che è $\bar{a} \leq x \forall x \in X$ e quindi è anche $\bar{a} \leq \bar{x}$. $\diamond$

Allo stesso modo di come si è proceduto per la definizione dell'estremo inferiore si può procedere per definire l'estremo superiore di una parte X di $\mathbb{R}$.

Definizione 2.3.3 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$.

$$(X \text{ si dice limitato superiormente}) \iff (\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in X x \leq b.)$$

$$(X \text{ si dice illimitato superiormente}) \iff (\forall b \in \mathbb{R} \exists x \in X : x > b.)$$

Nel caso che X sia limitato superiormente si può considerare un altro insieme di numeri reali che indichiamo con B , i cui elementi saranno detti maggioranti e B sarà detto l'insieme dei maggioranti per X . L'insieme B è definito come segue: $B = \{b \in \mathbb{R} : b \geq x \forall x \in X\}$. Evidentemente X è limitato superiormente se e solo se $B \neq \emptyset$; mentre X è illimitato superiormente se e solo se $B = \emptyset$.

Vale anche il seguente:

Teorema 2.3.3 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X limitato superiormente e sia B l'insieme dei suoi maggioranti.

Tesi: $\exists |e'' \in \mathbb{R} : x \leq e'' \leq b \forall x \in X \forall b \in B$.

Dimostrazione: Occorre constatare che X e B sono separati ed utilizzare la completezza di $\mathbb{R}$ per concludere che esiste almeno un elemento $e'' \in \mathbb{R}$ separatore tra X e B . La prova che tale elemento è anche unico segue dal fatto che X e B risultano contigui (il ragionamento è simile a quello fatto per l'estremo inferiore). $\diamond$

Definizione 2.3.4 (estremo superiore) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

I) Se X è limitato superiormente l'unico elemento separatore e'' tra X e l'insieme B dei suoi maggioranti si dice estremo superiore per X , e si pone $e'' = \sup X$.

Quindi risulta:

$$\begin{cases} i) x \leq \sup X & \forall x \in X, ; \\ ii) \sup X \leq b & \forall b \in B. \end{cases}$$

II) Se X è illimitato superiormente si pone $\sup X = +\infty$.

(Si noti che in tal caso l'insieme B dei maggioranti di X è vuoto: $B = \emptyset$).

Definizione 2.3.5 (elemento massimo) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $m \in \mathbb{R}$.

(m è massimo per X) $\iff (m = \sup X \text{ ed } m \in X)$.

Dalla definizione di elemento massimo si deduce che se X è illimitato superiormente allora X non ha elemento massimo. È possibile inoltre caratterizzare l'estremo superiore di un insieme X in termini dei suoi elementi in modo analogo a quanto visto per l'estremo inferiore:

Teorema 2.3.4 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ ed $s \in \mathbb{R}$.

$$s = \sup X \iff \begin{cases} 1) s \geq x \forall x \in X; \\ 2) \forall t \in \mathbb{R}, t < s, \exists x \in X : t < x \leq s. \end{cases}$$

Esempio 2.3.2 Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha:

$$b = \sup([a, b]) = \sup(]a, b[) = \sup([a, b[) = \sup(]a, b])$$

e

$$+\infty = \sup([a, +\infty[) = \sup(]a, +\infty[)$$

ed anche

$$b = \max([a, b]) = \max(]a, b]) = \max(]-\infty, b]).$$

Infine si ha:

$$+\infty = \sup(\mathbb{N}) = \sup(\mathbb{Q}) = \sup(\mathbb{R}).$$

È possibile ora caratterizzare la contiguità di due insiemi:

Teorema 2.3.5 Dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ separati,

$$(A \text{ e } B \text{ sono contigui}) \iff (A \text{ e } B \text{ hanno un unico elemento separatore}).$$

In tal caso se è $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$ allora si ha: $\sup A = \inf B$.

Dimostrazione: Sia ad esempio $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$. Siano A e B contigui e siano x ed y elementi separatori, per assurdo sia $x \neq y$; supponiamo $x < y$. Allora si ha $a \leq x < y \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$, che nega l'ipotesi di contiguità. Viceversa supponiamo che A e B non siano contigui; quindi, per definizione $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ tale che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha: $b - a \geq \bar{\varepsilon}$. Pertanto per definizione di estremi superiore ed inferiore si ha $\inf B - \sup A \geq \bar{\varepsilon}$, da cui si deduce che l'elemento separatore tra A e B non è unico. $\diamond$

2.4 Metrica e topologia euclidee in $\mathbb{R}$

È possibile rappresentare su una retta r i numeri reali $\mathbb{R}$. Il risultato è di Dedekind.

Più in particolare data una retta r esiste definito su di essa un ordinamento naturale che è quello secondo cui un punto precede un altro punto; inoltre considerati due punti 0 ed u con $0 \neq u$ si possono considerare due semirette su r entrambe di origine 0 , una di esse conterrà u . Si può vedere che esiste una funzione bigettiva $f : r \rightarrow \mathbb{R}$, che si dice riferimento su r , tale che $f(0) = 0$, $f(u) = 1$ e tale che f conservi gli ordinamenti, cioè considerati $v, w \in r$ si ha $v \text{ precede } w \Leftrightarrow f(v) \leq f(w)$. In base a quanto appena detto il punto $0 \in r$ tale che $f(0) = 0$ prende il nome di origine della retta secondo il riferimento f , mentre il punto $u \in r$ tale che $f(u) = 1$ prende il nome di punto unità di r . La semiretta di r di origine 0 che contiene u si dice semiretta positiva, mentre la semiretta di origine 0 che non contiene u si dice semiretta negativa. Per questo motivo si usano rappresentare i punti di una retta come numeri reali.

Ovviamente è possibile considerare infiniti sistemi di riferimento su una retta r .

Per poter definire la distanza (o metrica) euclidea su $\mathbb{R}$ consideriamo la seguente funzione, detta valore assoluto: $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il suo grafico nel piano cartesiano è dato, come si deduce facilmente dalla definizione, da due semirette che si incidono perpendicolarmente nell'origine degli assi, che si trovano nel primo e secondo quadrante e che formano con l'asse delle ordinate angoli di 45° . Questa funzione ha le seguenti proprietà:

Teorema 2.4.1 1. $|x| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $-|x| \leq x \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$, $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.

3. $|x + y| \leq |x| + |y| \forall x, y \in \mathbb{R}$ (subadditività).

4. $|xy| = |x||y| \forall x, y \in \mathbb{R}$ (proprietà moltiplicativa)

Dimostrazione: Le proprietà 1) e 2) sono ovvie. Per provare 3) siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x + y \geq 0$, allora $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ per la 1). Se invece, dati $x, y \in \mathbb{R}$, è $x + y < 0$ allora $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$ sempre per la 1). Per provare infine la 4) siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $xy \geq 0$ allora è $x \geq 0$ ed $y \geq 0$ oppure $x < 0$ e $y < 0$. Nel primo caso si ha: $|xy| = xy = |x||y|$, nel secondo caso si ha: $|xy| = -(xy) = (-x)(-y) = |x||y|$. Analogamente è il caso di $x, y \in \mathbb{R}$ e si ha $xy < 0$. $\diamond$

Mediante la funzione valore assoluto è possibile definire la distanza (detta euclidea) tra due numeri reali nel modo seguente:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad d(x, y) = |x - y|.$$

Si ha il seguente risultato:

Teorema 2.4.2 La funzione distanza verifica le seguenti proprietà:

d_1) $d(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

d_2) Proprietà di simmetria: $d(x, y) = d(y, x) \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

d_3) Proprietà triangolare: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: La proprietà d_1) è ovvia. Per vedere la d_2) si ha: $d(x, y) = |x - y| = |-1(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x)$. Per la d_3) risulta: $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$. $\diamond$

Mediante la distanza euclidea appena considerata, assegnato $x_o \in \mathbb{R}$ possiamo definire alcuni sottoinsiemi speciali di $\mathbb{R}$ che son gli intorno con i quali si può considerare la teoria del limite di una funzione.

Assegnato $x_o \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ indichiamo con $I(x_o, \delta)$ l'intervallo aperto di centro x_o e semi-ampiezza δ : $I(x_o, \delta) =]x_o - \delta, x_o + \delta[$. Naturalmente si ha: $x \in I(x_o, \delta) \iff |x - x_o| < \delta \iff d(x, x_o) < \delta$.

Fissato $x_o = -\infty$ e $\delta > 0$ indichiamo con $I(-\infty, \delta)$ la semiretta illimitata inferiormente di estremo destro $-\delta$ cioè: $I(-\infty, \delta) =]-\infty, -\delta[$.

Infine se è $x_o = +\infty$ e $\delta > 0$ indico con $I(+\infty, \delta)$ la semiretta illimitata superiormente di estremo sinistro δ , pongo allora: $I(+\infty, \delta) =]\delta, +\infty[$.

Definizione 2.4.1 (intorno di un punto) Siano assegnati $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ e $J \subseteq \mathbb{R}$.

$$(J \text{ è intorno di } x_o) \iff_{def} (\exists \delta > 0 : I(x_o, \delta) \subseteq J).$$

Quindi una parte J di $\mathbb{R}$ è intorno di un punto $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se contiene un opportuno intervallo con centro in x_o e raggio $\delta > 0$ nel caso in cui $x_o \in \mathbb{R}$, oppure se contiene una semiretta illimitata inferiormente o superiormente a seconda che $x_o = -\infty$ oppure $x_o = +\infty$.

Assegnato $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ indicheremo con $\mathcal{I}(x_o)$ la classe di tutti gli intorno di x_o .

Per la classe $\mathcal{I}(x_o)$ degli intorno di un punto $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ si hanno le seguenti proprietà:

Teorema 2.4.3 Dato $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$, sia $\mathcal{I}(x_o)$ la classe degli intorno di x_o .

1. $H, J \in \mathcal{I}(x_o) \implies H \cap J \in \mathcal{I}(x_o)$.
2. $J \in \mathcal{I}(x_o)$ e $J \subseteq H \implies H \in \mathcal{I}(x_o)$.
3. $\forall H \in \mathcal{I}(x_o) \exists J \in \mathcal{I}(x_o) \quad \text{con} \quad J \subseteq H : \forall x \in J \implies J \in \mathcal{I}(x)$.

Dimostrazione:

1. Se H e J sono due intorno di x_o esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tale che $I(x_o, \delta_1) \subseteq H$ ed $I(x_o, \delta_2) \subseteq J$. Ora se è $x_o \in \mathbb{R}$, preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha $I(x_o, \delta) \subseteq I(x_o, \delta_1) \cap I(x_o, \delta_2) \subseteq H \cap J$. Quindi si ha $H \cap J \in \mathcal{I}(x_o)$. Se invece si ha $x_o = +\infty$ oppure $x_o = -\infty$ prendendo $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha $I(x_o, \delta) \subseteq I(x_o, \delta_1) \cap I(x_o, \delta_2) \subseteq H \cap J$; e quindi anche in questo caso si ha $H \cap J \in \mathcal{I}(x_o)$.
2. La verifica è ovvia perchè se $J \in \mathcal{I}(x_o)$ esiste $\delta > 0$ tale che $I(x_{circ}, \delta) \subseteq J$; inoltre se $J \subseteq H$ allora si ha anche $I(x_o, \delta) \subseteq H$, e quindi $H \in \mathcal{I}(x_o)$.
3. Sia $H \in \mathcal{I}(x_o)$, per definizione esiste $\delta > 0$ tale che $I(x_o, \delta) \subseteq H$. Considero allora $J = I(x_o, \delta)$. Evidentemente $J \in \mathcal{I}(x_o)$, inoltre se $x \in J$ supposto $x_o \in \mathbb{R}$ considero $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \min\{x - (x_o - \delta), x_o + \delta - x\}$ allora si ha $I(x, \alpha) \subseteq J$, da cui si deduce che $J \in \mathcal{I}(x)$. Se invece si ha $x_o = +\infty$ considero ad esempio $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (x - \delta)$ e ottengo l'inclusione $I(x, \alpha) \subseteq J$ da cui segue ovviamente che $J \in \mathcal{I}(x)$.

Infine se $x_o = -\infty$ posso considerare ad esempio $\alpha = \frac{1}{2}(-\delta - x)$.

$\diamond$

Teorema 2.4.4 (proprietà di separazione) 1. $\forall x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ con $x_1 \neq x_2$ $\exists H \in \mathcal{I}(x_1)$ e $\exists K \in \mathcal{I}(x_2) : H \cap K = \emptyset$

2. $\forall x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ con $x_1 < x_2$ $\exists H \in \mathcal{I}(x_1)$ e $\exists K \in \mathcal{I}(x_2) : \forall y \in H$ e $\forall t \in K$ si ha $y < t$.

Dimostrazione: Evidentemente la proprietà 2) implica la proprietà 1). Provo quindi la 2).

Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ considero $\delta = \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$, allora posto $H = I(x_1, \delta)$ e $K = I(x_2, \delta)$ si ha la tesi, cioè $\forall y \in H$ e $\forall t \in K$ si ha $y < x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) < x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1) < t$.

Se invece si ha $x_1 \in \mathbb{R}$ ed $x_2 = +\infty$ posso prendere ad esempio $H = I(x_1, 1)$ e $K =]x_2 + 2, +\infty[= I(+\infty, x_2 + 2)$, ottenendo ovviamente la tesi.

Se si ha $x_1 = -\infty$ ed $x_2 \in \mathbb{R}$ considero $H =]-\infty, x_2 - 2[$ e $K =]x_2 - 1, x_2 + 1[= I(x_2, 1)$; infine se si ha $x_1 = -\infty$ ed $x_2 = +\infty$ posso considerare $H =]-\infty, -1[= I(-\infty, 1)$ e $K =]1, +\infty[= I(+\infty, 1)$. $\diamond$

Definizione 2.4.2 (insieme aperto) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$.

$$(X \text{ si dice aperto}) \iff_{\text{def}} \begin{cases} 1) & X = \emptyset; \\ \text{oppure} \\ 2) & \forall x \in X \text{ si ha: } X \in \mathcal{I}(x). \end{cases}$$

Un esempio di insieme aperto in $\mathbb{R}$ è dato da un qualunque intervallo aperto $]a, b[$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Indicheremo a volte con $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ la classe degli insiemi aperti di $\mathbb{R}$. Proprietà fondamentali degli insiemi aperti sono date dal seguente:

Teorema 2.4.5 1. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, cioè $\emptyset$ ed $\mathbb{R}$ sono insiemi aperti.

2. Se $(A_i)_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$, cioè se $A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R}) \forall i \in I$, allora $\cup_{i \in I} A_i$ è ancora un aperto di $\mathbb{R}$, cioè $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

3. Se A_1, A_2 sono insiemi aperti di $\mathbb{R}$ allora $A_1 \cap A_2$ è ancora aperto.

Dimostrazione: La 1) è ovvia. Per verificare la 2) consideriamo l'insieme $\cup_{i \in I} A_i$ che chiamerò brevemente A e supponiamo che sia non vuoto (se fosse vuoto la tesi seguirebbe dalla 1). Sia allora $x \in A$, per definizione di unione, esiste $i(x)$ tale che $x \in A_{i(x)}$. poichè $A_{i(x)}$ è aperto risulta, per definizione, $A_{i(x)} \in \mathcal{I}(x)$, ne segue allora che $A \in \mathcal{I}(x)$ per la 2) del teorema (2.4.4). Infine per provare la 3) considero A_1 ed A_2 aperti in $\mathbb{R}$ tali che $A = A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ e sia x un qualunque punto di A , per definizione di intersezione tra due insiemi si ha $x \in A_1$ ed $x \in A_2$. Allora per definizione di insieme aperto esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tale che $I(x, \delta_1) \subseteq A_1$ ed $I(x, \delta_2) \subseteq A_2$, se ora considero $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si verifica che $I(x, \delta) \subseteq A$, da cui si ricava che $A = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{I}(x)$. Quindi A risulta aperto perchè risulta intorno di un qualunque suo punto. $\diamond$

Osservazione 2.4.1 Ovviamente la proprietà 2) del teorema (2.4.7) si può estendere ad un numero finito di insiemi aperti ottenendo ancora che la loro intersezione è un insieme aperto. Non si può estendere questa proprietà ad una famiglia infinita di aperti: si consideri infatti la famiglia di intervalli aperti data da $(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)_{n \in \mathbb{N}}$, si verifica facilmente che risulta: $\cap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ che ovviamente non è un insieme aperto.

Definizione 2.4.3 (insieme chiuso) Dato $X \subseteq \mathbb{R}$.

$$(X \text{ si dice chiuso in } \mathbb{R}) \iff_{\text{def}} (\mathbb{R} \setminus X \text{ è aperto in } \mathbb{R}).$$

Esempi semplici di insiemi chiusi in $\mathbb{R}$ sono gli intervalli chiusi $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, le semirette del tipo $] - \infty, a]$ e $[a, +\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$. Comunque per gli insiemi chiusi di $\mathbb{R}$ vale il seguente risultato:

Teorema 2.4.6 1. Se $(C_i)_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi chiusi di $\mathbb{R}$ allora $\bigcap_{i \in I} C_i$ è ancora chiuso in $\mathbb{R}$.

2. Se C_1, C_2 sono chiusi allora $C_1 \cup C_2$ è ancora chiuso.

Dimostrazione: Si ottiene il risultato facendo uso della definizione di insieme chiuso e delle formule di De Morgan. Infatti si ha $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus C_i)$ che dà la tesi perchè unione di insiemi aperti è ancora un insieme aperto. Analoga dimostrazione si ha per la 2). $\diamond$

Osservazione 2.4.2 Ovviamente, come nel caso degli insiemi aperti, anche per gli insiemi chiusi la proprietà 2) del teorema (2.4.10) è estendibile ad un numerofinito di insiemi chiusi ottenendo che la loro unione è ancora un insieme chiuso. Non è invece possibile estendere questa proprietà ad una famiglia infinita di insiemi chiusi la cui unione in generale non è un insieme chiuso: si consideri la famiglia $([-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}}$ la cui unione è ovviamente l'intervallo aperto $] - 1, 1[$.

Osservazione 2.4.3 È il caso di notare che ci sono sottoinsiemi X di $\mathbb{R}$ che non sono nè aperti nè chiusi, si consideri per questo l'intervallo $X = [a, b[$ oppure l'intervallo $X =]a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

CAPITOLO 3

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

3.1 Funzioni monotone.

Definizione 3.1.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ ed una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti definizioni:

1. (f è crescente su X) $\iff_{def} (\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
2. (f è strettamente crescente su X) $\iff_{def} (\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
3. (f è decrescente su X) $\iff_{def} (\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
4. (f è strettamente decrescente su X) $\iff_{def} (\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Normalmente si dice che f è monotona su X se e solo se f verifica una delle precedenti definizioni.

Di facile verifica è il seguente:

Teorema 3.1.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, con $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f strettamente crescente (decrescente) $\implies f$ crescente (decrescente).
2. f è (strettamente) crescente su $X \iff -f$ è (strettamente) decrescente su X

È possibile verificare anche il seguente:

Teorema 3.1.2 Dati $X \subseteq \mathbb{R}$, con $X \neq \emptyset$, ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ si ha:

1. f e g crescenti (decrescenti) su $X \implies f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ crescente (decrescente) su X .
2. f crescente (decrescente) su X ed $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0 \implies af$ crescente (decrescente) su X .
3. f e g crescenti (decrescenti) su X ed $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \forall x \in X \implies fg$ crescente (decrescente) su X .

Dimostrazione: È utilizzata la proprietà di compatibilità tra la relazione d'ordine e le operazioni di addizione e di moltiplicazione in $\mathbb{R}$.

- 1) Siano f e g crescenti su X e siano x_1 e x_2 due punti di X con $x_1 < x_2$, si ha

$$f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2).$$

Da cui segue che $f + g$ è crescente su X .

- 2) La verifica è ovvia.

3) Siano f e g crescenti e non negative su X e siano x_1 ed x_2 due punti di X con $x_1 < x_2$, risulta:

$$f(x_1)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_2),$$

da cui si deduce che fg è crescente su X . $\diamond$

Teorema 3.1.3 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $Y \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ ed $Y \neq \emptyset$ e siano $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni con $f(X) \subseteq Y$.*

1. *f e g crescenti (decrecenti) rispettivamente su X e su $Y \implies g \circ f$ crescente (decrecente) su X .*
2. *f crescente (decrecente) su X e g decrecente (crescente) su $Y \implies g \circ f$ decrecente su X .*

Dimostrazione: 1) Siano f e g crescenti su X e su Y rispettivamente e siano x_1 ed x_2 due punti di X con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq g(x_2)$ e quindi, poichè g è crescente si ha $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. La verifica della 2) è simile alla 1). $\diamond$

Teorema 3.1.4 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $Y \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ ed $Y \neq \emptyset$, sia $f : X \rightarrow Y$ bigettiva e sia $f^{-1} : Y \rightarrow X$ la funzione inversa di f .*

$$f \text{ crescente (decrecente) su } X \iff f^{-1} \text{ crescente (decrecente) su } Y.$$

Dimostrazione: Sia f crescente su X , verifico che f^{-1} è crescente. Siano y_1, y_2 due punti di Y con $y_1 < y_2$, poichè f è bigettiva esistono $x_1, x_2 \in X$ univocamente individuati tali che $y_1 = f(x_1)$ ed $y_2 = f(x_2)$. Evidentemente è $x_1 < x_2$. Quindi f^{-1} è strettamente crescente. Analoga dimostrazione prova che se f^{-1} è monotona allora è anche strettamente monotona ed inoltre f è strettamente monotona dello stesso carattere. $\diamond$

Teorema 3.1.5 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente (strettamente decrecente) allora f è iniettiva. Quindi la funzione inversa della ridotta $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ è bigettiva ed è monotona dello stesso carattere di f .*

Dimostrazione: Consideriamo $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, sia ad esempio $x_1 < x_2$. Se f è strettamente crescente è anche $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi è $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\diamond$

Osservazione 3.1.1 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, con $X \neq \emptyset$, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva non è detto che sia monotona.*

Si consideri, ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ovviamente f è iniettiva ma non è monotona.

Indicheremo con $\mathcal{M}(X, \mathbb{R})$ la classe delle funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ che sono monotone su X , con $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{R})$ la classe delle funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ che sono crescenti su X e con $\mathcal{M}^-(X, \mathbb{R})$ la classe delle funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ che sono decrecenti su X . I teoremi precedenti descrivono, quindi, proprietà delle classi precedenti; in particolare la proprietà 1) del teorema (3.1.3) dice che $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{R})$ ed $\mathcal{M}^-(X, \mathbb{R})$ sono stabili per somma.

3.2 Funzioni convesse

La nozione di convessità per una funzione su un insieme X ha senso solo se esso è un intervallo. Per questo assegnata $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, supporremo nel corso di questo paragrafo che X sia un intervallo.

Osservazione 3.2.1 *Se X è un intervallo e se $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ allora:*

$$\forall x \in [x_1, x_2] \quad \exists |t \in [0, 1] \quad : \quad x = tx_2 + (1-t)x_1.$$

Infatti se $x \in [x_1, x_2]$ si ha:

$$x = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}x = \frac{x_2x - x_1x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2x_1 - x_1x + x_2x - x_2x_1}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2,$$

ponendo $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ (di conseguenza: $1 - t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$) si ha la tesi.

In particolare per $t = \frac{1}{2}$ resta definito il punto medio $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e per $t = \frac{1}{3}$ resta definito il terzo medio $x = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$. Infine per $t = 0$ si ha $x = x_1$ e per $t = 1$ si ha $x = x_2$.

Definizione 3.2.1 *Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. f è convessa su $X \iff_{def} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in [0, 1] \\ f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$
2. f è strettamente convessa su $X \iff_{def} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in]0, 1[\\ f(tx_2 + (1-t)x_1) < tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$
3. f è concava su $X \iff_{def} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in [0, 1] \\ f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$
4. f è strettamente concava su $X \iff_{def} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in]0, 1[\\ f(tx_2 + (1-t)x_1) > tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$

Teorema 3.2.1 *Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. f è (strettamente) convessa $\iff -f$ è (strettamente) concava.
2. f è concava e convessa $\iff \exists m, q \in \mathbb{R} : f(x) = mx + q \quad \forall x \in X$.
3. f convessa su $X \implies \begin{cases} \forall c \in \mathbb{R} \text{ l'insieme } E = \{x \in X : f(x) \leq c\} \\ \text{è vuoto oppure è un intervallo} \\ \text{(eventualmente ridotto ad un punto).} \end{cases}$

$$4. f \text{ concava su } X \implies \begin{cases} \forall c \in \mathbb{R} \text{ l'insieme } E = \{x \in X : f(x) \geq c\} \\ \text{è vuoto oppure è un intervallo} \\ \text{(eventualmente ridotto ad un punto).} \end{cases}$$

Dimostrazione: La proprietà 1) è ovvia.

La verifica di 2) si ottiene tenendo conto che se $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, se f è contemporaneamente concava e convessa su X risulta dalla definizione:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \leq f(x) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \quad \forall x \in X.$$

Ne segue allora che :

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \quad \forall x \in X.$$

Ponendo allora $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ e $q = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$ si ha la tesi.

Il viceversa è ovvio.

Per verificare la 3), cioè che E è un intervallo, basta far vedere che se $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$ allora si ha $[x_1, x_2] \subseteq E$, quindi preso $x \in [x_1, x_2]$ occorre provare che $x \in E$.

Sia assegnato allora $x \in [x_1, x_2]$, essendo f per ipotesi convessa si ha

$$f(x) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} c + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} c = c$$

cioè $f(x) \leq c$ da cui segue che $x \in E$. Analoga è la verifica si ha se f è concava. $\diamond$

Osservazione 3.2.2 *La proprietà 2) non è invertibile.*

Infatti ci sono funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per le quali l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq c\} \quad \forall c \in \mathbb{R}$ è un intervallo però f non è convessa. Si consideri infatti una qualunque funzione monotona definita su un intervallo; come esempio si consideri ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x$ se è $x \leq 0$, $f(x) = x + 2$ se è $x > 0$.

Definizione 3.2.2 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione ed $x_o \in X$ tale che $X \setminus \{x_o\} \neq \emptyset$.
La funzione*

$$F_{x_o} : X \setminus \{x_o\} \rightarrow \mathbb{R} \quad F_{x_o}(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \forall x \in X \setminus \{x_o\}$$

si chiama funzione rapporto incrementale di f relativa al punto x_o .

Teorema 3.2.2 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.*

1. f è convessa $\iff \forall x_o \in X \quad F_{x_o}$ è crescente .
2. f è strettamente convessa $\iff \forall x_o \in X \quad F_{x_o}$ è strettamente crescente .
3. f è concava $\iff \forall x_o \in X \quad F_{x_o}$ è decrescente .
4. f è strettamente concava $\iff \forall x_o \in X \quad F_{x_o}$ è strettamente decrescente .

Dimostrazione: Verifico la proprietà 1). Sia f convessa, sia $x_o \in X$ e sia F_{x_o} la funzione rapporto incrementale relativa ad x_o , inoltre siano $x_1, x_2 \in X \setminus \{x_o\}$ con $x_1 < x_2$. Sia anche $x_1 < x_2 \leq x_o$, per la convessità di f , risulta:

$$f(x_2) \leq \frac{x_o - x_2}{x_o - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_o - x_1} f(x_o).$$

Quindi:

$$f(x_2)(x_o - x_1) \leq (x_o - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_o).$$

E allora:

$$(f(x_2) - f(x_o))(x_o - x_1) \leq (x_o - x_2)(f(x_1) - f(x_o)).$$

Cioè:

$$(f(x_2) - f(x_o))(x_1 - x_o) \geq (x_2 - x_o)(f(x_1) - f(x_o)).$$

Dividendo ambo i membri per $(x_1 - x_o)(x_2 - x_o)$ si ha:

$$\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \leq \frac{f(x_2) - f(x_o)}{x_2 - x_o}$$

cioè

$$F_{x_o}(x_1) \leq F_{x_o}(x_2).$$

In modo analogo si prova la tesi nel caso si abbia $x_1 < x_o < x_2$ oppure $x_o < x_1 < x_2$.

La verifica della implicazione inversa è altrettanto semplice.

La dimostrazione delle altre proprietà si ottiene con ragionamenti simili. $\diamond$

Teorema 3.2.3 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.

1. f, g (strettamente) convesse $\implies f + g$ (strettamente) convessa.
2. f, g (strettamente) concave $\implies f + g$ (strettamente) concava.
3. f convessa (concava) $\implies \forall a \in [0, +\infty[$ af convessa (concava).
4. f, g convesse, monotone dello stesso carattere e non negative $\implies fg$ convessa.
5. f, g concave, monotone dello stesso carattere e non positive $\implies fg$ convessa.
6. f non negativa e concava e g non positiva e convessa ed entrambe monotone dello stesso carattere $\implies fg$ convessa.
7. f, g non negative, concave e monotone di carattere diverso $\implies fg$ concava.
8. f non negativa e convessa, g non positiva e concava, f, g monotone di carattere diverso $\implies fg$ concava.
9. f concava e positiva su $X \implies \frac{1}{f}$ è convessa su X .
10. f convessa e negativa su $X \implies \frac{1}{f}$ è concava su X .

Dimostrazione. La dimostrazione di 1), 2) e 3) è banale conseguenza della definizione.

Per provare 4) siano allora $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ e sia $t \in [0, 1]$ occorre provare che è:

$$f(tx_2 + (1-t)x_1)g(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2)g(x_2) + (1-t)f(x_1)g(x_1)$$

o equivalentemente:

$$f(tx_2 + (1-t)x_1)g(tx_2 + (1-t)x_1) - tf(x_2)g(x_2) + (1-t)f(x_1)g(x_1) \leq 0.$$

Se f, g sono convesse e non negative si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} & f(tx_2 + (1-t)x_1)g(tx_2 + (1-t)x_1) - tf(x_2)g(x_2) + (1-t)f(x_1)g(x_1) \leq \\ & t^2f(x_2)g(x_2) + t(1-t)f(x_1)g(x_2) + t(1-t)f(x_2)g(x_1) + \\ & (1-t)^2f(x_1)g(x_1) - tf(x_2)g(x_2) - (1-t)f(x_1)g(x_1) = \\ & (t^2 - t)f(x_2)g(x_2) - t(1-t)f(x_1)g(x_1) + t(1-t)f(x_1)g(x_2) + t(1-t)f(x_2)g(x_1) = \\ & (t^2 - t)[f(x_2)g(x_2) + f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1)] = \\ & -t(1-t)[f(x_2)(g(x_2) - g(x_1)) + f(x_1)(g(x_1) - g(x_2))] = \\ & -t(1-t)[f(x_1) - f(x_2)][g(x_1) - g(x_2)]. \end{aligned}$$

Quindi se f e g sono monotone dello stesso tipo le espressioni in parentesi quadre hanno lo stesso segno, e pertanto si ha la tesi, cioè fg è convessa.

La dimostrazione di 5) si può ricondurre a 4) passando da f a $-f$ e da g a $-g$.

La dimostrazione di 6), 7) e 8) è simile a quella fatta per 4).

Per verificare la 9) sia f concava e tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in X$; occorre provare che $\frac{1}{f}$ è convessa, cioè che $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ e $\forall t \in [0, 1]$ si ha:

$$\frac{1}{f(tx_2 + (1-t)x_1)} \leq t\frac{1}{f(x_2)} + (1-t)\frac{1}{f(x_1)}$$

che equivale a provare che è

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq \frac{f(x_1)f(x_2)}{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)}.$$

Utilizzando la concavità si ha:

$$\begin{aligned} & f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq tf(x_2) + (1-t)f(x_1) \geq \\ & \frac{(tf(x_2) + (1-t)f(x_1))(tf(x_1) + (1-t)f(x_2))}{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)} = \\ & = \frac{t^2f(x_1)f(x_2) + t(1-t)(f(x_2))^2 + t(1-t)(f(x_1))^2 + (1-t)^2f(x_1)f(x_2)}{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)} \geq \\ & \frac{f(x_1)f(x_2) + t(1-t)[f(x_1) - f(x_2)]^2}{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)} \geq \\ & \frac{f(x_1)f(x_2)}{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)}. \end{aligned}$$

Per verificare la 10) se f è negativa e convessa la funzione $-f$ è positiva e concava, allora per la 9), $\frac{-1}{f}$ è convessa; quindi $\frac{1}{f}$ è concava. $\diamond$

Teorema 3.2.4 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, si consideri anche un intervallo $Y \subseteq \mathbb{R}$, con $f(X) \subseteq Y$, e sia $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Valgono le seguenti proprietà.

1. f, g convesse e g crescente $\implies g \circ f$ convessa.
2. f, g concave e g crescente $\implies g \circ f$ concava.
3. g concava e decrescente, f convessa $\implies g \circ f$ concava.
4. g concava e crescente, f concava $\implies g \circ f$ concava.

Dimostrazione: Provo la 1). Le altre si dimostrano in modo analogo. Per verificare che $g \circ f$ è convessa considero $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ e sia $t \in [0, 1]$, per le ipotesi fatte si ha: $g(f(tx_2 + (1-t)x_1)) \leq g(tf(x_2) + (1-t)f(x_1)) \leq tg(f(x_2)) + (1-t)g(f(x_1))$.

La prima disuguaglianza segue dalla convessità di f e dalla monotonia di g . La seconda disuguaglianza segue dalla convessità di g . $\diamond$

Definizione 3.2.3 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f \text{ si dice di Lipschitz (o lipschitziana) su } X \iff_{\text{def}} \begin{cases} \exists k \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in X \\ |f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|. \end{cases}$$

Teorema 3.2.5 Sia $X = [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, un intervallo chiuso e limitato, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa (o concava).

Tesi: f è limitata su $[a, b]$, cioè $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Dimostrazione: Per verificare che f è limitata superiormente basta usare la convessità su $[a, b]$, quindi $\forall x \in [a, b]$ si ha: $f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$.

Pertanto si ha: $f(x) \leq M = \max\{f(a), f(b)\}$.

Per verificare invece che f è limitata inferiormente utilizziamo la convessità nel modo seguente: considero $X_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$ ed $X_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$.

Allora si ha:

$$\forall x \in X_1 \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\frac{b+a}{2} - x}{b - x}f(b) + \frac{b - \frac{b+a}{2}}{b - x}f(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{2(b-x)}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2(\frac{a+b}{2} - x)}{b-a}f(b) \geq \\ &-2\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - \frac{2(\frac{a+b}{2} - a)}{b-a}|f(b)| \geq -2\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - |f(b)|. \end{aligned}$$

Inoltre $\forall x \in X_2$ si ha:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{x - \frac{a+b}{2}}{x - a}f(a) + \frac{\frac{a+b}{2} - a}{x - a}f(x).$$

Con calcoli simili al caso di $x \in X_1$ si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$\forall x \in X_2 \quad f(x) \geq -2|f(\frac{a+b}{2})| - |f(a)|.$$

Ponendo poi

$$m = \min\{-|f(\frac{a+b}{2})| - |f(a)|, -|f(\frac{a+b}{2})| - |f(b)|\}$$

si ha

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in [a, b].$$

Se f è concava la tesi è ancora verificata perchè si può considerare $-f$ che è convessa, quindi è limitata su $[a, b]$; di conseguenza anche f è limitata su $[a, b]$. $\diamond$

Osservazione 3.2.3 *Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo non necessariamente chiuso e limitato non è detto che una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ che sia convessa debba essere anche limitata.*

Si consideri infatti $X = \mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Inoltre se $X =]-1, 1[$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ data dalla relazione $f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in]-1, 1[$ è reciproco di una funzione positiva e concava su $] -1, 1[$ e si può applicare la proprietà 9) del teorema (3.2.7).

Entrambe queste funzioni sono convesse ma illimitate.

Teorema 3.2.6 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa (o concava). Sia inoltre $[a, b]$ un intervallo interno ad X , cioè tale che $\inf X < a \leq b < \sup X$.*

Tesi: f è lipschitziana su $[a, b]$, cioè $\exists k \geq 0 : |f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

Dimostrazione: Siano $c, d \in \mathbb{R}$ con $\inf X < c < a \leq b < d < \sup X$ e considero due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$.

Per la proprietà di convessità di f risulta:

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_1}{d - x_1} f(d) + \frac{d - x_2}{d - x_1} f(x_1)$$

e allora:

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{x_2 - x_1}{d - x_1} (f(d) - f(x_1)) \leq$$

$$\frac{|x_2 - x_1|}{d - b} (|f(d)| + \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}) = k_1 |x_2 - x_1|.$$

Applicando ora la definizione di convessità tra i punti $c < a \leq x_1 < x_2$ si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{|x_2 - x_1|}{a - c} (|f(c)| + \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}) = k_2 |x_2 - x_1|.$$

Considerando poi $k = \max\{k_1, k_2\}$ si ha la tesi, cioè $|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$. $\diamond$

Osservazione 3.2.4 *Non è detto che se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è definita su $X = [a, b]$ ed è convessa sia anche Lipschitziana.*

Si consideri infatti la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = -\sqrt{1-x^2} \forall x \in [-1, 1]$, essa è convessa perchè rappresenta la semicirconferenza inferiore con centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio 1. Questa funzione, come si potrà agevolmente verificare utilizzando il calcolo differenziale, non è però lipschitziana su $[-1, 1]$.

Teorema 3.2.7 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente crescente e tale che $f(X) = Y$ sia un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $f^{-1} : Y \rightarrow X$ l'inversa della ridotta di f .*

1. f è (strettamente) convessa $\iff f^{-1}$ è (strettamente) concava .
2. f è (strettamente) concava $\iff f^{-1}$ è (strettamente) convessa .

Dimostrazione: 1) Sia f convessa, siano $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 < y_2$ e sia $y \in [y_1, y_2]$. Per ipotesi esistono unici $x_1, x_2 \in X$ tale che $y_1 = f(x_1)$ ed $y_2 = f(x_2)$. Siccome f è strettamente crescente è $x_1 < x_2$. Considerato inoltre $x \in [x_1, x_2]$ tale che $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ per l'ipotesi di convessità di f si ha:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = y.$$

Poichè esiste f^{-1} , la si può applicare alla disuguaglianza precedente; tenendo conto poi che anche f^{-1} è strettamente crescente si ha:

$$x \leq f^{-1}\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)\right) = f^{-1}(y),$$

cioè

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &\geq x = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + x_1 = \\ &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} x_2 + \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} x_1 = \\ &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f^{-1}(y_2) + \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f^{-1}(y_1), \end{aligned}$$

dalla quale si deduce che f^{-1} è concava.

Ovviamente il ragionamento fatto si può banalmente invertire facendo vedere che se f^{-1} è concava allora f è convessa. La verifica di 2) è simile alla 1). $\diamond$

Teorema 3.2.8 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente decrescente e tale che $f(X) = Y$ sia un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $f^{-1} : Y \rightarrow X$ l'inversa della ridotta di f .*

1. f è (strettamente) convessa $\iff f^{-1}$ è (strettamente) convessa .
2. f è (strettamente) concava $\iff f^{-1}$ è (strettamente) concava .

Dimostrazione: Si può procedere in modo analogo al teorema (3.2.14). $\diamond$

3.3 Funzioni elementari

Studieremo in questo paragrafo alcune funzioni elementari che saranno utili nel seguito. Per esse saranno applicate le definizioni e le proprietà dei paragrafi precedenti per studiarne il segno, la monotonia e la convessità. Saranno considerate anche le condizioni per verificare l'eventuale esistenza della funzione inversa. Alcune funzioni elementari che saranno considerate sono in realtà studiabili attraverso le conoscenze della geometria analitica o della trigonometria elementari.

Definizione 3.3.1 (Funzione costante su $\mathbb{R}$) Dato $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = k \forall x \in \mathbb{R}$ prende il nome di funzione costante di valore k .

Questa funzione non è iniettiva, non è nemmeno suriettiva perchè la sua immagine è ridotta al solo elemento k : $f(\mathbb{R}) = \{k\}$. Quindi f non è invertibile. Il segno di questa funzione dipende ovviamente dal segno della costante k che la definisce. Secondo le definizioni dei due paragrafi precedenti f è contemporaneamente crescente e decrescente e inoltre è contemporaneamente convessa e concava. Il grafico di tale funzione è dato da una retta del piano cartesiano parallela all'asse delle ascisse, in particolare se è $k = 0$ tale retta coincide con l'asse delle ascisse. $\diamond$

Definizione 3.3.2 (Funzione identità di $\mathbb{R}$) È la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$.

Questa funzione è ovviamente bigettiva (la sua inversa è f stessa: $f^{-1} = f$), è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$ ed è strettamente crescente. Inoltre f è contemporaneamente convessa e concava su $\mathbb{R}$. Il grafico di f è dato da una retta del piano cartesiano passante per l'origine degli assi cartesiani ed ha coefficiente angolare 1. $\diamond$

Definizione 3.3.3 (Funzione valore assoluto) La sua definizione è stata già data nel paragrafo relativo allo studio della metrica euclidea di $\mathbb{R}$. Comunque è esprimibile come segue:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi se è $x \geq 0$ il grafico di f coincide con la semiretta bisettrice del primo quadrante, mentre se è $x < 0$ il grafico di f coincide con la bisettrice del secondo quadrante, ovviamente queste due semirette si incontrano perpendicolarmente nell'origine degli assi cartesiani. La funzione valore assoluto è non negativa, cioè verifica la seguente disuguaglianza: $|x| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre è strettamente crescente sulla semiretta $[0, +\infty[$ ed è strettamente decrescente sulla semiretta $] -\infty, 0]$, una conseguenza è che non risulta nè iniettiva nè suriettiva. Infine è convessa su $\mathbb{R}$. $\diamond$

Mediante le prime due funzioni e le operazioni fondamentali tra numeri reali di addizione, moltiplicazione e le relative operazioni inverse si possono costruire le funzioni polinomio e le funzioni razionali che sono rapporti tra polinomi.

Definizione 3.3.4 (Funzione polinomio di grado 1) È una funzione definita ed a valori in $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dalla relazione $f(x) = ax + b \forall x \in \mathbb{R}$.

Essa si può pensare come somma tra la funzione costante data dal valore b e dalla funzione $g(x) = ax$ che a sua volta si può pensare come prodotto tra la funzione costante data dal valore a e dalla funzione identica di $\mathbb{R}$.

Si verifica facilmente che f è bigettiva se e solo se è $a \neq 0$. In tal caso la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di f è data dalla relazione $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \forall y \in \mathbb{R}$.

Inoltre f è strettamente crescente se e solo se è $a > 0$, mentre f è strettamente decrescente se è $a < 0$. Infine f è contemporaneamente convessa e concava. Il grafico di f è dato da una retta di coefficiente angolare a ed ordinata all'origine b . $\diamond$

Allo scopo di esaminare le funzioni potenza e di verificarne la eventuale suriettività consideriamo il seguente risultato.

Definizione 3.3.5 (Funzione quadrato, o potenza di esponente 2) È una funzione definita ed a valori in $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dalla relazione $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La funzione quadrato è non negativa, cioè verifica la seguente disuguaglianza: $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre è strettamente crescente sulla semiretta $[0, +\infty[$ ed è strettamente decrescente sulla semiretta $] -\infty, 0]$. Conseguenza di questo è che non risulta nè iniettiva nè suriettiva quindi non è invertibile. Si può però considerare la sua restrizione alla semiretta $[0, +\infty[$ dove essa è strettamente crescente e dove si ha $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ (la verifica è riportata di seguito).

Si può allora affermare che è invertibile, ad esempio, la ridotta della restrizione della funzione quadrato alla semiretta positiva. La sua inversa, f^{-1} , è definita $[0, +\infty[$ ed ha valori su $[0, +\infty[$, la sua relazione è data da $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}} \quad \forall y \in [0, +\infty[$. Essa definisce la funzione radice quadrata.

Infine, utilizzando le relative proprietà si verifica facilmente che è strettamente convessa su $\mathbb{R}$.

Il grafico è quello di una parabola con il vertice nell'origine e l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate

Definizione 3.3.6 (Funzione cubo, o potenza di esponente 3) È una funzione definita in $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dalla relazione $f(x) = x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La funzione cubo è negativa sulla semiretta $] -\infty, 0]$, è nulla nell'origine ed è positiva sulla semiretta $[0, +\infty[$.

Inoltre è strettamente crescente su tutta la retta $\mathbb{R}$; in conseguenza di ciò essa risulta iniettiva; essendo poi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ è anche suriettiva (la verifica è riportata di seguito). Quindi la funzione cubo è bigettiva.

La sua funzione inversa f^{-1} è definita in $\mathbb{R}$ ed ha valori in $\mathbb{R}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dalla relazione $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$. In tal modo si definisce la funzione radice cubica.

Infine, utilizzando le relative proprietà enunciate nel paragrafo precedente, si può vedere che la funzione cubo è convessa dove è positiva, ed è concava dove è negativa.

Definizione 3.3.7 (Funzione potenza di esponente $n \in \mathbb{N}$) Assegnato $n \in \mathbb{N}$ la funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dalla relazione $f(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Il suo comportamento varia a seconda che n sia pari o dispari. Sostanzialmente si può dire che dal punto di vista del segno, della monotonia e della convessità, essa si comporta come la funzione quadrato se n è pari. Mentre se n è dispari il suo andamento è simile alla funzione cubo.

Lasciando al lettore il dettaglio delle altre proprietà, in questa sede vogliamo solo osservare che dal punto di vista della invertibilità essa è invertibile se l'esponente n è dispari. La funzione inversa definisce la funzione radice di ordine n .

Se invece l'esponente è pari la funzione non risulta invertibile.

Per quanto riguarda la determinazione dell'insieme immagine di f e quindi per ciò che riguarda l'invertibilità possiamo premettere il seguente:

Teorema 3.3.1 Assegnato $n \in \mathbb{N}$ si ha: $\forall y \in [0, +\infty[\quad \exists! x \in [0, +\infty[: x^n = y$.

Dimostrazione: L'unicità di x è facile conseguenza della stretta monotonia della funzione potenza su $[0, +\infty[$ qualunque sia l'esponente intero n considerato. Per provare l'esistenza osserviamo che se $y = 0$ considero $x = 0$ e per $y = 1$ considero $x = 1$. Consideriamo ora $y > 1$ e definiamo i seguenti insiemi: $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0, a^n \leq y\}$ e $B = \{b \in \mathbb{R} : b > 0, b \leq y, b^n > y\}$. I due

insiemi sono non vuoti perchè $1 \in A$ ed $y \in B$; sono separati perchè: $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha: $a^n < y < b^n \implies a^n < b^n \implies a < b$, quindi è $\sup A \leq \inf B$.

Provo che risulta: $\sup A = \inf B$.

Se fosse $\sup A < \inf B$, considero z con $z \in]\sup A, \inf B[$, cioè con $\sup A < z < \inf B$.

Dalla disuguaglianza $\sup A < z$ si deduce $z > 0$ e $z \notin A$ pertanto si ha anche $z > 0$ e $z^n > y$. Invece dalla disuguaglianza $z < \inf B$, tenendo conto che $z \notin B$ e $y \in B$, si deduce $z < y$; inoltre essendo $z > 0$, $z < y$ e $z \notin B$ si ha $z^n \leq y$.

In conclusione per il numero reale z si ottengono la relazioni seguenti

$$z > 0, z^n > y, z < y, z^n \geq y$$

che sono ovviamente in contraddizione tra loro.

Pongo $x = \sup A = \inf B$ e verifico che è $x^n = y$ utilizzando il fatto che A e B sono contigui, cioè che $\sup A = \inf B$.

Infatti è

$$a^n \leq x^n \leq b^n \quad \text{e} \quad a^n \leq y < b^n \quad \forall a \in A, \forall b \in B,$$

è allora

$$y - x^n \leq b^n - a^n \quad \text{e} \quad x^n - y \leq b^n - a^n,$$

da cui segue, per le proprietà del valore assoluto:

$$|y - x^n| \leq b^n - a^n \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Per una regola elementare di scomponibilità si ha:

$$|y - x^n| \leq b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1})(b - a)(ny^{n-1})$$

poichè $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b \leq y$.

Pertanto per la disuguaglianza precedente: $\forall \varepsilon > 0$ considero, per le proprietà caratteristiche degli estremi inferiore e superiore, $a_\varepsilon \in A$ e $b_\varepsilon \in B$ tale che $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{ny^{n-1}}$, quindi è $|y - x^n| \leq \varepsilon$, per cui risulta $y - x^n = 0$, cioè $y = x^n$.

Se invece è $0 < y < 1$ considero per il caso precedentemente considerato $x > 0$ tale che $x^n = \frac{1}{y}$ e quindi il numero $\frac{1}{x}$ verifica la richiesta fatta perchè è ovviamente $(\frac{1}{x})^n = y$. $\diamond$

Conseguenza del risultato appena dimostrato è la seguente definizione:

Teorema 3.3.2 1. Sia n pari.

La funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ definita dalla relazione $f(x) = x^n \quad \forall x \in [0, +\infty[$ è bigettiva, quindi è invertibile.

La sua inversa $f^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ si chiama la radice di ordine n e si indica con $\sqrt[n]{\cdot}$ cioè $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} \quad \forall y \in [0, +\infty[$.

2. Sia n dispari.

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita dalla relazione $f(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ è bigettiva, quindi è invertibile.

La sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama la radice di ordine n e si indica con $\sqrt[n]{\cdot}$ cioè $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} \quad \forall y \in [0, +\infty[$.

Dimostrazione: Per verificare 1) basta leggere la tesi del teorema (3.3.1).

Per verificare la 2) sia $y \in]-\infty, 0[$, allora $-y \in]0, +\infty[$. Allora per il teorema (3.3.1) esiste un solo $x \in]0, +\infty[$ tale che $x^n = -y$. Se ora considero $-x$ evidentemente si ha $(-x)^n = y$. $\diamond$

In base al teorema precedente è possibile quindi definire la funzione radice di ordine n .

Come si è già notato, per essa l'insieme di definizione cambia a seconda che n sia pari o che n sia dispari.

Il tutto può essere riformulato in modo più esauriente secondo la seguente definizione.

Definizione 3.3.8 (Funzione radice di ordine n o funzione potenza di esponente $\frac{1}{n}$, con n pari)

Sia $n \in \mathbb{N}$ con n pari.

È definita la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ dalla relazione seguente

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \sqrt[n]{x} = y \iff_{\text{def}} x = y^n.$$

A volte questa funzione viene indicata come funzione potenza di esponente $\frac{1}{n}$.

I risultati dei due paragrafi precedenti permettono di affermare che la funzione radice di ordine n , con n pari, è strettamente crescente, concava e a sua volta è essa stessa bigettiva, quindi la sua immagine è data ancora da $[0, +\infty[$.

Definizione 3.3.9 (Funzione radice di ordine n o funzione potenza di esponente $\frac{1}{n}$, con n dispari)

Sia $n \in \mathbb{N}$ con n dispari.

È definita la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dalla relazione seguente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt[n]{x} = y \iff_{\text{def}} x = y^n.$$

Anche in questo caso, a volte, questa funzione viene detta funzione potenza di esponente $\frac{1}{n}$. Essa è negativa su $] -\infty, 0[$ ed è positiva su $]0, +\infty[$, è strettamente crescente e bigettiva, ed è convessa dove è negativa e concava dove è positiva.

Possiamo ora considerare la funzione esponenziale di base $a \in]0, +\infty[$

Per poter definire in $\mathbb{R}$ la funzione esponenziale di base $a \in]0, +\infty[$, è opportuno considerare la definizione preliminare di funzione esponenziale definita sull'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali i cui elementi sono facilmente rappresentabili mediante rapporti di numeri interi. Successivamente si passa alla definizione della funzione esponenziale quando l'esponente è un numero reale facendo ricorso alla proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ed alle definizioni delle operazioni di estremo superiore e di estremo inferiore.

Consideriamo ora la definizione quando l'esponente è un numero razionale. Abbiamo la seguente definizione:

Definizione 3.3.10 Assegnato un numero $a \in]0, +\infty[$ definiamo la funzione $\exp_a : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ esponenziale di base a nel modo seguente:

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \text{con} \quad r = \frac{m}{n} \quad \exp_a(r) = \begin{cases} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} & \text{se } m, n \in \mathbb{N}, \\ a^0 = 1 & \text{se } m = 0, \\ a^r = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{-m}}} & \text{se } m \in \mathbb{Z}, m < 0, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Per questo consideriamo prima il seguente risultato:

Teorema 3.3.3 *Assegnato $a \in]0, +\infty[$, la corrispondente funzione $\exp_a : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ definita precedentemente è monotona. In particolare:*

1. *se è $a \in]0, 1[$ allora $\exp_a$ è strettamente decrescente;*
2. *se è $a \in]1, +\infty[$ allora $\exp_a$ è strettamente crescente;*
3. *se $a = 1$ la funzione $\exp_a$ è costantemente uguale ad 1.*

Inoltre si ha: $\exp_a(r+s) = \exp_a(r)\exp_a(s) \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione: Se è $a = 1$ la tesi è ovvia.

Supponiamo $a > 1$ e siano $q_1 = \frac{m}{n}$ e $q_2 = \frac{r}{s}$ due numeri razionali con $m, r \in \mathbb{Z}$ ed $n, s \in \mathbb{N}$ e con $q_1 < q_2$. Si ha allora $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$ e quindi $ms < rn$, poichè $a > 1$ risulta $a^{ms} < a^{rn}$, considerando ora la potenza di esponente $\frac{1}{ns}$ di ambo i membri si conserva la disuguaglianza e si ha: $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{r}{s}}$.

Se è $a \in]0, 1[$ per dedurre che la funzione $\exp_a$ è strettamente decrescente considero $\frac{1}{a}$ per il quale si ha: $\frac{1}{a} > 1$. Pertanto se q_1 e q_2 sono due numeri razionali con $q_1 < q_2$, per quanto provato nel caso precedente, si ha $\frac{(1)^{q_1}}{a} < \frac{(1)^{q_2}}{a}$ da cui si deduce che $a^{q_1} > a^{q_2}$. $\diamond$

Teorema 3.3.4 *Siano $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ contigui, sia $a \in]0, +\infty[$ e siano $X = \{a^x : x \in A\}$ ed $Y = \{a^y : y \in B\}$ gli insiemi immagine di A e di B rispettivamente mediante la precedente funzione $\exp_a$, cioè: $X = \exp_a(A)$ ed $Y = \exp_a(B)$.*

Tesi: X ed Y sono contigui.

Dimostrazione: Se è $a = 1$ la tesi è ovvia, in tal caso infatti si ottiene $X = Y = \{1\}$.

Supponiamo intanto $a > 1$ e supponiamo anche che $\forall x \in A, \forall y \in B \quad x < y$, allora per il risultato precedente si ha $a^x < a^y \quad \forall x \in A \forall y \in B$. Per verificare che X ed Y sono contigui considero $\varepsilon > 0$, q numero razionale con $x \leq q \quad \forall x \in A$, inoltre dati $x \in A$ ed $y \in B$ con $y - x < \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$ da determinarsi opportunamente) si ha:

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) \leq a^q(a^{y-x} - 1) < a^q(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq a^q \frac{a - 1}{n}.$$

Se allora si considera $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^q \frac{a-1}{n} < \varepsilon$, cioè $n > a^q \frac{a-1}{\varepsilon}$, si ha la tesi.

Se è $a \in]0, 1[$ il ragionamento per ottenere la tesi è simile. $\diamond$

È possibile ora definire la funzione esponenziale perchè, considerato un qualunque $x \in \mathbb{R}$ i due insiemi

$$A(x) = \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[$$

e

$$B(x) = \mathbb{Q} \cap]x, +\infty[$$

sono contigui. Quindi è possibile dare la seguente definizione:

Definizione 3.3.11 1. *Sia $a \in]1, +\infty[$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$ si definisce a^x nel modo seguente:*

$$a^x =_{def} \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[\} = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q} \cap]x, +\infty[\}.$$

2. *Sia $a \in]0, 1[$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$ si definisce a^x nel modo seguente:*

$$a^x =_{def} \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[\} = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \cap]x, +\infty[\}.$$

3. Sia $a = 1$ si definisce $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Continueremo a chiamare ancora con $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione appena definita, e porremo anche $\exp_a(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Teorema 3.3.5 *Assegnato $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ si ha:*

1. $\forall x \in \mathbb{Q}$ i due valori che determinano $\exp_a(x)$ mediante le due definizioni precedenti sono uguali.
2. La funzione $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente monotona, in particolare se è $a \in]0, 1[$ è strettamente decrescente mentre se è $a \in]1, +\infty[$ è strettamente crescente.
3. La ridotta all'insieme $]0, +\infty[$ della funzione $\exp_a$, che con abuso di linguaggio, continueremo a chiamare ancora con $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, è bigettiva, quindi è invertibile.
Cioè si ha: $\forall y \in]0, +\infty[\quad \exists |x \in \mathbb{R} : a^x = y$.
4. La funzione esponenziale definita nella definizione precedente è l'unico prolungamento monotono da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$ della funzione $\exp_a$ definita in (3.3.1). Cioè se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona e risulta $g(x) = \exp_a(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ allora si ha: $g(x) = \exp_a(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
5. Risulta $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$ ed $(ab)^x = (a^x)(b^x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: 1) Assegnato $x \in \mathbb{Q}$ con $x = \frac{m}{n}$, dalla prima delle due definizioni considerate si deduce che risulta $\exp_a(x) = a^x = a^{\frac{m}{n}}$; inoltre si può osservare che:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r > x\}$$

da cui si deduce che la tesi è vera.

2) Sia $a \in]1, +\infty[$, verifico che la funzione $\exp_a$ è strettamente crescente. Per questo siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$, considero allora $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ con $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$. Per definizione, tenendo presenti le proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore, si ha $\exp_a(x_1) \leq \exp_a(y_1)$ ed $\exp_a(y_2) \leq \exp_a(x_2)$. Inoltre per la stretta crescita di $\exp_a$ su $\mathbb{Q}$ si ha $\exp_a(y_1) < \exp_a(y_2)$. Quindi si ha la tesi perchè risulta:

$$\exp_a(x_1) \leq \exp_a(y_1) < \exp_a(y_2) \leq \exp_a(x_2).$$

Simile ragionamento si può fare per provare che $\exp_a$ è strettamente decrescente se risulta $a \in]0, 1[$.

3) Anche in questo caso supponiamo intanto $a \in]1, +\infty[$ e sia $y \in]0, +\infty[$. Considero allora i due insiemi $A = \{q \in \mathbb{R} : a^q < y\}$ e $B = \{r \in \mathbb{R} : a^r > y\}$ e verifico che sono contigui.

Intanto osservo che risulta $q < r \quad \forall q \in A \quad \forall r \in B$ perchè è $a \in]1, +\infty[$ e quindi $\exp_a$ risulta strettamente crescente. Ne segue allora che è $\sup A \leq \inf B$. In realtà però risulta $\sup A = \inf B$.

Infatti se fosse $\sup A < \inf B$ allora $\forall z \in]\sup A, \inf B[$ sarebbe $a^z \geq y$ perchè $z \notin A$ ed inoltre è $a^z \leq y$ perchè $z \notin B$, e pertanto sarebbe $a^z = y \quad \forall z \in]\sup A, \inf B[$. Cioè $\exp_a$ sarebbe costante su un intervallo, mentre è strettamente crescente. Pongo allora $x = \sup A = \inf B$, e provo che risulta $a^x = y$. Per ottenere questo risultato provo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists |a^x - y| \leq \varepsilon.$$

Fisso allora $\varepsilon > 0$. Inoltre osservo che si ha:

$$\forall q \in A \forall r \in B \quad q \leq x \leq r \implies a^q \leq a^x \leq a^r,$$

essendo inoltre

$$a^q < y < a^r \quad \forall q \in A \forall r \in B$$

si ha:

$$y - a^x \leq a^r - a^q \quad \text{ed} \quad a^x - y \leq a^r - a^q \quad \forall q \in A \forall r \in B.$$

Quindi in particolare risulta:

$$|a^x - y| \leq a^r - a^q = a^q(a^{r-q} - 1) \quad \forall q \in A \cap \mathbb{Q} \forall r \in B \cap \mathbb{Q}.$$

Se ora si considera $n \in \mathbb{N}$ con $r - q < \frac{1}{n}$ e con la proprietà ulteriore per cui si ha: $a^x \frac{(a-1)}{n} < \varepsilon$, risulta provata la tesi. Anche in questo caso se è $a \in]0, 1[$, considero $\frac{1}{a} \in]1, +\infty[$, quindi assegnato $y \in]0, +\infty[$ considero $\frac{1}{y}$ e allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{(1^x)}{a} = \frac{1}{y}$ da cui si deduce che $a^x = y$. L'unicità segue dalla stretta monotonia della funzione esponenziale.

4) Sia $a > 1$ e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona tale che $g(q) = \exp_a(q) = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$, allora se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si ha: $a^q \leq g(x) \leq a^r \quad \forall q \in \mathbb{Q} \text{ con } q < x \quad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ con } x < r$. Quindi $\sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} \leq g(x) \leq \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, x < r\}$. Però per il teorema (3.3.5) i due insiemi $X = \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$ ed $Y = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, x < r\}$ sono contigui, perchè trasformati mediante la funzione $\exp_a$ dei seguenti insiemi contigui $A = \{q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$ e $B = \{r : r \in \mathbb{Q}, x < r\}$, ed hanno quindi lo stesso elemento separatore che coincide con a^x .

Pertanto risulta $g(x) = a^x$, che è ciò che si voleva provare. Il caso $a \in]0, 1[$ si tratta in modo analogo al caso $a > 1$. 5) La verifica delle proprietà enunciate è conseguenza della definizione

della funzione. $\diamond$

Osservazione 3.3.1 *Assegnato $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ si verifica che la funzione $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente convessa, mentre come detto già precedentemente, per $a = 1$ la funzione $\exp_1$ è costantemente uguale ad 1.*

Dalla proprietà 3) del teorema (3.3.7), se è $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, si deduce che esiste la funzione inversa di $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, cioè esiste $\exp_a^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 3.3.12 *Si definisce logaritmo in base a , e si indica con $\log_a$, la funzione:*

$$\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \log_a y = x \iff_{\text{def}} a^x = y \quad \forall y \in]0, +\infty[.$$

È allora possibile definire nel piano cartesiano di ascissa x ed ordinata y una nuova funzione elementare le cui proprietà sono citate dal seguente risultato.

Teorema 3.3.6 *Assegnato $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ è definita la funzione $\log_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dalla relazione:*

$$\log_a x = y \iff_{\text{def}} a^y = x \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

La funzione $\log_a$ ha le seguenti proprietà:

1. *È una funzione strettamente monotona. In particolare se è $a > 1$ è strettamente crescente, mentre se è $0 < a < 1$ è strettamente decrescente.*

2. Se è $a > 1$ allora $\log_a x > 0 \iff x > 1$, $\log_a x = 0 \iff x = 1$ ed infine $\log_a x < 0 \iff 0 < x < 1$.
Se invece è $0 < a < 1$ allora $\log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$, $\log_a x = 0 \iff x = 1$ ed infine $\log_a x < 0 \iff x > 1$.
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x^y) = y \log_a x$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \forall x > 0, \forall a > 0, a \neq 1, \forall b > 0, b \neq 1$.
4. La funzione $\log_a$ è strettamente concava se e solo se è $a > 1$, mentre è strettamente convessa se e solo se è $0 < a < 1$.

Dimostrazione: Si ottiene facilmente dai risultati sulla funzione esponenziale e dai risultati generali sulle funzioni monotone e sulle funzioni convesse considerati nei paragrafi precedenti. $\diamond$

Osservazione 3.3.2 Vale la pena osservare esplicitamente che non esiste il logaritmo in base 1.

Inoltre è opportuno rilevare che si ha: $\log_a a = 1 \quad \forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ e $\log_a x^{-1} = -\log_a x \quad \forall x > 0 \quad \forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

Utilizzando la definizione adottata per la funzione esponenziale è possibile definire la funzione potenza ad esponente reale.

Definizione 3.3.13 (Funzione potenza ad esponente reale) Assegnato $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce funzione potenza ad esponente reale la seguente funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x^\alpha \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Assegnato un numero reale $a > 1$ (ad esempio) è possibile vedere la funzione f potenza ad esponente reale come funzione composta tra una funzione esponenziale ed una funzione logaritmo nel modo seguente:

$$f(x) = x^\alpha = a^{\alpha \log_a x} \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Utilizzando quindi i risultati sulla funzione esponenziale e sulla funzione logaritmo, si può considerare il seguente risultato:

Teorema 3.3.7 1. $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2. f è strettamente crescente se e solo se risulta $\alpha > 0$, mentre f è strettamente decrescente se e solo se è $\alpha < 0$. Inoltre si ha: $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[\quad \forall \alpha \neq 0$.
3. Se è $\alpha \neq 0$, la ridotta all'intervallo $]0, +\infty[$ di f , che con abuso di linguaggio chiamo ancora con $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, è invertibile e la sua inversa $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ è la funzione potenza di esponente $\frac{1}{\alpha}$, quindi $\forall y \in]0, +\infty[\quad f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\alpha}}$.
4. f è strettamente convessa se e solo se è $\alpha > 1$ oppure se è $\alpha < 0$, f è strettamente concava se e solo se è $0 < \alpha < 1$. Se è $\alpha = 0$ la funzione f vale costantemente 1 ed ha come grafico la semiretta parallela all'asse delle ascisse, se è $\alpha = 1$ la funzione f ha come grafico la semiretta bisettrice del primo quadrante.

Osservazione 3.3.3 Se α è un numero naturale, cioè se $\alpha \in \mathbb{N}$, la funzione potenza definita ora è la restrizione della funzione potenza ad esponente intero all'intervallo $]0, +\infty[$.

Se invece $\alpha = \frac{1}{n}$ la funzione potenza diventa la restrizione della funzione radice di ordine n all'intervallo $]0, +\infty[$.

Siamo ora in grado di considerare le funzioni trigonometriche.

Considereremo le funzioni trigonometriche definite nella forma intuitivo-geometrica e utilizzeremo la procedura che fa uso della circonferenza con centro nell'origine O degli assi cartesiani ed avente raggio 1.

Tale circonferenza, come noto, è definita come la circonferenza goniometrica.

Una definizione rigorosa di queste funzioni prevede l'uso degli omomorfismi tra il gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ e quello moltiplicativo $(U, *)$ dei numeri complessi di modulo 1.

Indicato con A il punto di intersezione tra la circonferenza ed il semiasse positivo dell'asse delle ascisse esso si denota come l'origine degli archi, che vengono misurati sulla circonferenza.

Considerato anche un punto P sulla circonferenza goniometrica restano individuati due archi che hanno entrambi come estremi i punti A e P . È definita positiva la misura dell'arco che, partendo da A , viene percorso in verso antiorario, mentre è definito negativo il segno della misura dell'arco che viene percorso nel verso orario.

Definizione 3.3.14 ($\cos x$ e $\sin x$) Sia x la misura dell'arco AP misurato, sulla circonferenza goniometrica, nel verso orario o antiorario. L'ascissa di P prende il nome di $\cos x$, mentre l'ordinata di P prende il nome di $\sin x$.

Dalla definizione si deducono le seguenti proprietà:

1. $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$.
3. $\cos x > 0 \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$.
4. $\cos x < 0 \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)$.
5. $\sin x > 0 \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi, \pi + 2k\pi \right)$.
6. $\sin x < 0 \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \right)$.
7. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Valgono anche altre relazioni.

In particolare in questa sede vogliamo citare le formule di addizione e di sottrazione della funzione $\cos$ e della funzione $\sin$:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

e

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

È opportuno citare anche le formule di prostaferesi che trasformano somme di coseni e seni in prodotto.

Quelle relative alla sottrazione possono essere utilizzate per dimostrare la continuità e la derivabilità delle funzioni $\sin$ e $\cos$.

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right), \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$$

e

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right), \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$$

Definizione 3.3.15 ($\tan x$) *Sia x un arco di origine A misurato in senso antiorario sulla circonferenza goniometrica, con $x \neq \frac{\pi}{2}$ e con $x \neq \frac{3\pi}{2}$ e sia P il secondo estremo dell'arco.*

Sia B il punto di intersezione tra la retta r tangente in A alla circonferenza ed il prolungamento ρ del raggio passante per P .

Si definisce $\tan x$ la misura, con segno, del segmento AB . Questa misura si prende con il segno positivo se il segmento AB si trova nel semipiano delle ordinate positive, mentre è considerata negativa se il segmento AB si trova nel semipiano negativo delle ordinate.

Si verifica facilmente che la funzione $\tan x$ è periodica di periodo π . Cioè si ha:

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

Mediante considerazioni tra triangoli simili si deduce che

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad \cos x \neq 0.$$

CAPITOLO 4

IL LIMITE DI UNA FUNZIONE

4.1 Limite di una funzione e prime proprietà.

Definizione 4.1.1 (punto di accumulazione) Siano $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $X \subseteq \mathbb{R}$.

$(x_o \text{ si dice punto di accumulazione per } X) \iff_{def} (\forall I \in \mathcal{I}(x_o) \text{ si ha: } I \cap X \setminus \{x_o\} \neq \emptyset).$

Indicheremo con $\mathcal{D}(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione di X , tale insieme sarà a volte chiamato il derivato di X . Se x_o non è punto di accumulazione per X si dice isolato rispetto ad X ; quindi è possibile dare la seguente:

Definizione 4.1.2 (punto isolato) Siano $x_o \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $X \subseteq \mathbb{R}$.

$(x_o \text{ si dice isolato rispetto ad } X) \iff_{def} (\exists I \in \mathcal{I}(x_o) : I \cap X \setminus \{x_o\} = \emptyset).$

L'insieme dei punti isolati per X è allora $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{D}(X)$.

Esempio 4.1.1 1. Se $X = \mathbb{R}$ allora $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \overline{\mathbb{R}}$.

2. Se $X = \mathbb{N}$ allora $\mathcal{D}(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$.

3. Se $X =]a, b[$ con $a < b$ allora $\mathcal{D}(]a, b[) = [a, b]$.

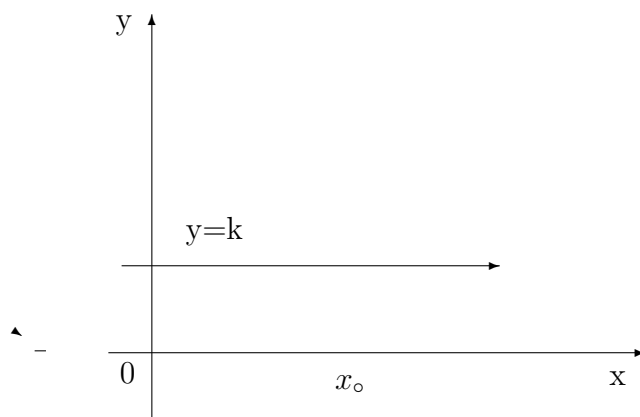
4. Se $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ allora $\mathcal{D}(X) = \{0\}$.

Definizione 4.1.3 (limite) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$, sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$(\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell) \iff_{def} (\forall J \in \mathcal{I}(\ell) \quad \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in (I \cap X) \setminus \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in J).$

Consideriamo ora due esempi molto semplici ma molto importanti di funzioni: la funzione costante e la funzione identità, per esse vogliamo valutare il limite in un qualunque punto di accumulazione.

Queste funzioni sono importanti perchè mediante le operazioni di addizione e di moltiplicazione e le loro rispettive operazioni inverse (sottrazione e divisione) si possono ottenere le funzioni razionali (che sono rapporti di polinomi); inoltre mediante il comportamento di queste due particolari funzioni e mediante alcuni teoremi che saranno considerati successivamente si potrà studiare anche il limite delle funzioni razionali.



Esempio 4.1.2 1. Sia $k \in \mathbb{R}$ assegnata e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: $f(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Di solito, con abuso di linguaggio, si chiama la funzione costante k .

Si vuole verificare che

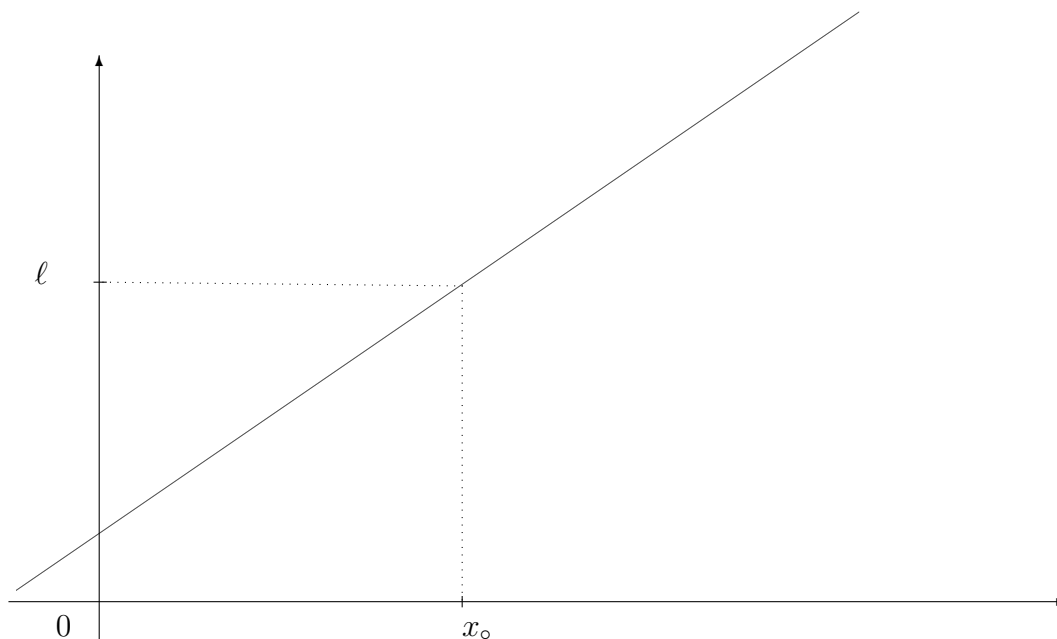
$$\forall x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k.$$

La verifica è molto semplice dal momento che fissato $J \in \mathcal{I}(k)$ si può considerare $I = \mathbb{R} \in \mathcal{I}(x_0)$. Infatti $\forall x \in I \cap \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ si ha: $f(x) = k \in J$.

2. Considero ora la funzione identica di $\mathbb{R}$ cioè $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



Si vuole verificare che:

$$\forall x_o \in \overline{\mathbb{R}} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = x_o$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_o} x = x_o.$$

Infatti fissato $J \in \mathcal{I}(x_o)$ (con x_o considerato come il limite, quindi valutato sull'asse delle ordinate) posso prendere $I = J$ (adesso I è considerato sull'asse delle ascisse), allora è ovvio che $\forall x \in I \cap \mathbb{R} \setminus \{x_o\} f(x) = x \in J$.

Teorema 4.1.1 (unicità del limite.) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_o \in \mathcal{D}(X)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = m$$

Tesi: $\ell = m$.

Dimostrazione: Per assurdo sia $\ell \neq m$, e, per la proprietà 1) di separazione degli intorni citata nel teorema (2.4.5) siano $H \in \mathcal{I}(\ell)$ e $K \in \mathcal{I}(m)$ con $H \cap K = \emptyset$.

Utilizzando la definizione di limite per ℓ è possibile affermare che: $\exists A \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in A \cap X \setminus \{x_o\} f(x) \in A$, applicando poi la stessa definizione di limite per il valore m si prova che $\exists B \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in B \cap X \setminus \{x_o\} f(x) \in B$.

Considerando ora l'insieme $I = A \cap B$ per esso si ha $I \in \mathcal{I}(x_o)$. Inoltre risulta $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} f(x) \in A$ ed $f(x) \in B$.

Cioè $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}$ si ha $f(x) \in A \cap B$, ne segue che $A \cap B \neq \emptyset$. Però per ipotesi si ha $A \cap B = \emptyset$. $\diamond$

Esempio 4.1.3 1. Si consideri la funzione esponenziale di base $a > 0$, $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Vogliamo provare che

$$\forall x_o \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_o} a^x = a^{x_o}$$

e che valgono anche le seguenti proprietà

$$a > 1 \implies \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$a \in]0, 1[\implies \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

2. Si consideri la funzione logaritmo di base $a > 0$ ed $a \neq 1$, $f(x) = \log_a x \quad \forall x \in]0, +\infty[$. Vogliamo provare che

$$\forall x_o \in]0, +\infty[\quad \exists \lim_{x \rightarrow x_o} \log_a x = \log_a x_o$$

e che valgono anche le seguenti proprietà

$$a > 1 \implies \exists \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$a \in]0, 1[\implies \exists \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

3. Si consideri la funzione trigonometrica $f(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Vogliamo provare che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

e che valgono anche le seguenti proprietà

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x \quad e \quad \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

4. Si consideri la funzione trigonometrica $f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Vogliamo provare che

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

e che valgono anche le seguenti proprietà

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x \quad e \quad \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$$

Il seguente teorema mette a confronto due funzioni assegnate attraverso il dei loro limiti, che si suppone esistano.

Teorema 4.1.2 (confronto) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ed $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$.

Tesi:

$$a) \ell < m \implies \exists I \in \mathcal{I}(x_0) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\} f(x) < g(x);$$

$$b) \exists I \in \mathcal{I}(x_0) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\} f(x) \leq g(x) \implies \ell \leq m.$$

Dimostrazione: a) Poichè è $\ell < m$, per la proprietà 2) del teorema di separazione degli intorni, esistono $A \in \mathcal{I}(\ell)$ e $B \in \mathcal{I}(m)$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a < b$. Utilizzando tali intorni A e B nella definizione di limite per f e per g rispettivamente: $\exists H \in \mathcal{I}(\ell) : \forall x \in H \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in A$ ed inoltre $\exists K \in \mathcal{I}(m) : \forall x \in K \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $g(x) \in B$. Considerando $I = H \cap K$ si ha intanto $I \in \mathcal{I}(x_0)$ ed inoltre $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha: $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$, cioè $f(x) < g(x)$.

b) Per poter provare tale implicazione supponiamo, per assurdo, $\ell > m$. Allora per a) esiste $A \in \mathcal{I}(\ell)$ tale che $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ è $f(x) > g(x)$. Inoltre per ipotesi esiste $I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\}$ è $f(x) \leq g(x)$. Considerando ora $V = A \cap I$ si ha $V \in \mathcal{I}(x_0)$ e inoltre $\forall x \in V \cap X \setminus \{x_0\}$ è contemporaneamente $f(x) > g(x)$ ed $f(x) \leq g(x)$. $\diamond$

Anche il teorema che segue è in realtà un teorema di confronto. Infatti esso si può leggere utilizzando il precedente risultato quando una delle due funzioni è quella nulla. Quest'ultima, dal punto di vista geometrico, rappresenta l'asse delle ascisse. Il risultato che si ottiene riguarda allora il confronto tra il grafico della funzione assegnata ed il suddetto asse. Una conseguenza immediata di questo confronto consiste nella determinazione del segno della funzione quando sia noto quello del limite.

Teorema 4.1.3 (permanenza del segno) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$.

Tesi:

a) $\ell < 0 \implies \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} f(x) < 0$.

b) $\exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} f(x) \leq 0 \implies \ell \leq 0$.

Dimostrazione. È possibile ottenere la proprietà a) considerando la analoga proprietà a) del teorema del confronto e mettendo in quella proprietà la funzione f di questo teorema e la funzione g costantemente uguale a 0 su X , cioè la funzione $g(x) = 0 \forall x \in X$, e ricordando che tale funzione g ha limite in x_o uguale a 0. Stesso ragionamento se si vuole dimostrare la b): occorre sostituire la funzione $g(x) = 0 \forall x \in X$ nella analoga proprietà del teorema del confronto. $\diamond$

Teorema 4.1.4 (limitatezza locale) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Tesi:

$\exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0$ ed $\exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} -k \leq f(x) \leq k$.

Dimostrazione. Si consideri l'intorno $J =]\ell - 1, \ell + 1[$ del limite ℓ e sia $I \in \mathcal{I}(x_o)$ un intorno di x_o .

Evidentemente $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}$ si ha: $f(x) \in J$, cioè: $\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$. A questo punto basta considerare $k = |\ell| + 1 > 0$ per avere la tesi. $\diamond$

4.2 Teoremi sulle operazioni.

In questo paragrafo considereremo teoremi che legano l'operazione di limite con le principali operazioni algebriche tra funzioni.

Teorema 4.2.1 (addizione, moltiplicazione, divisione) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$ e che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = m$.

Tesi:

$$1. \exists \ell + m \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x) + g(x)) = \ell + m.$$

$$2. \exists \ell m \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x)g(x)) = \ell m.$$

$$3. \exists \frac{\ell}{m} \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}.$$

Dimostrazione: Verifico la proprietà 1) riguardante l'addizione di funzioni.

L'ipotesi per cui $\ell + m$ non è forma indeterminata esclude la possibilità che possa essere $\ell = +\infty$ ed $m = -\infty$ oppure che sia $\ell = -\infty$ ed $m = +\infty$.

Sia allora $J \in \mathcal{I}(\ell + m)$, verifico preliminarmente che esistono $A \in \mathcal{I}(\ell)$ e $B \in \mathcal{I}(m)$ tale che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha: $a + b \in J$.

Infatti se si ha $\ell, m \in \mathbb{R}$ allora dato $J \in \mathcal{I}(\ell+m)$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $] \ell+m-2\varepsilon, \ell+m+2\varepsilon[\subseteq J$, considero allora $A =] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ e $B =] m - \varepsilon, m + \varepsilon[$ che sono gli intorni cercati.

Se invece è $\ell = +\infty$ ed $m \in \mathbb{R}$ si ha $\ell + m = +\infty$; in tal caso dato $J \in \mathcal{I}(+\infty)$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $] \varepsilon, +\infty[\subseteq J$. Considero ora ad esempio $A =] -m, +\infty[$ e $B =] m - \varepsilon, m + \varepsilon[$ ottenendo rispettivamente gli intorni di ℓ e di m che ci interessano.

Se è $\ell = -\infty$ ed $m \in \mathbb{R}$ si ha $\ell + m = -\infty$, allora se $\varepsilon > 0$ è tale che $] -\infty, -\varepsilon[\subseteq J \in \mathcal{I}(-\infty)$, posso considerare ad esempio $A =] -\infty, -m - 2\varepsilon[$ e $B =] m - \varepsilon, m + \varepsilon[$.

Se è $\ell = m = +\infty$ allora evidentemente è $\ell + m = +\infty$; se allora $\varepsilon > 0$ è tale che $] \varepsilon, +\infty[\subseteq J$ posso ad esempio considerare $A = B =] \varepsilon, +\infty[$.

Gli altri casi per ℓ e per m si risolvono facilmente tenendo presenti quelli appena visti.

Ora applico ad A ed a B rispettivamente per la funzione f e per la funzione g la definizione di limite, che per ipotesi esiste per entrambe.

In corrispondenza di $A \in \mathcal{I}(\ell)$ esiste $H \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $\forall x \in H \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in A$.

Allo stesso modo in corrispondenza di $B \in \mathcal{I}(m)$ esiste $K \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $\forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\} \quad g(x) \in B$.

Considerato ora $I = H \cap K$ si può dire che $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in A$ e $g(x) \in B$, quindi $f(x) + g(x) \in J$, che è la tesi.

Per verificare 2) osservo preliminarmente che l'espressione ℓm non è forma indeterminata, cioè è una espressione con risultato in $\overline{\mathbb{R}}$ e quindi è una forma determinata, quando non è $\ell = \pm\infty$ ed $m = 0$ oppure quando non si ha $\ell = 0$ ed $m = \pm\infty$.

Come già visto per la 1), anche in questo caso verifico che: se ℓm non è forma indeterminata allora vale la seguente proprietà:

$$\forall J \in \mathcal{I}(\ell m) \quad \exists A \in \mathcal{I}(\ell) \quad \text{ed} \quad \exists B \in \mathcal{I}(m) \quad \text{tale che} \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad \forall b \in B \quad \text{si ha} \quad ab \in J.$$

Per verificare questa proprietà cominciamo col supporre $\ell, m \in \mathbb{R}$, sia $J \in \mathcal{I}(\ell m)$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $] \ell m - \varepsilon, \ell m + \varepsilon[\subseteq J$.

Determino $\sigma > 0$ tale che, considerato $A =] \ell - \sigma, \ell + \sigma[$ e $B =] m - \sigma, m + \sigma[$, essi siano gli intorni cercati.

Per questo osservo che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ risulta:

$$|ab - \ell m| = |ab - am + am - \ell m| \leq |ab - am| + |am - \ell m| =$$

$$|a||b - m| + |a - \ell||m| < (|\ell| + \sigma)\sigma + \sigma|m| = \sigma^2 + (|\ell| + |m|)\sigma < \varepsilon.$$

Quindi la relazione che determina σ in corrispondenza di ℓ, m, ε è la seguente:

$$\sigma^2 + (|\ell| + |m|)\sigma - \varepsilon < 0$$

da cui si deduce che una soluzione σ è data dalla relazione:

$$\sigma = \frac{1 - (|\ell| + |m|) + \sqrt{(|\ell| + |m|)^2 + 4\varepsilon}}{4}.$$

Se è $\ell = +\infty$ ed $m \in \mathbb{R}$ con $m > 0$ allora è $\ell m = +\infty$, quindi se $\varepsilon > 0$ è tale che $] \varepsilon, +\infty[\subseteq J$ basta prendere $\sigma = \frac{m}{2}$, e gli insiemi $A =] \frac{2\varepsilon}{m}, +\infty[$ e $B =] \frac{m}{2}, \frac{3m}{2}[$.

In tal caso la richiesta è certamente soddisfatta, infatti $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $ab > \frac{2\varepsilon}{m} \frac{m}{2} = \varepsilon$ cioè $ab \in] \varepsilon, +\infty[\subseteq J$, cioè $ab \in J$.

Se risulta $\ell = +\infty$ ed $m \in \mathbb{R}$ con $m < 0$ si ha evidentemente $\ell m = -\infty$, allora preso $\varepsilon > 0$ tale che $] -\infty, -\varepsilon[\subseteq J$ si può considerare $\sigma = \frac{-m}{2}$.

Di conseguenza si può considerare $A =] -\frac{2\varepsilon}{m}, +\infty[$ e $B =]\frac{3m}{2}, \frac{m}{2}[$. In tal caso si ha il risultato voluto, infatti $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha: $ab < -\frac{2\varepsilon}{m} \frac{m}{2} = -\varepsilon$ cioè $ab \in J$.

Se è $\ell = m = +\infty$ si ha ovviamente $\ell m = +\infty$, allora preso $\varepsilon > 1$ tale che $]\varepsilon, +\infty[\subseteq J$ si può considerare $A = B =]\varepsilon, +\infty[$. Gli intorno così determinati soddisfano la richiesta fatta.

Gli altri possibili casi si possono risolvere facilmente tenendo presenti quelli già considerati.

Ora applico ad A ed a B rispettivamente per la funzione f e per la funzione g la definizione di limite, che per ipotesi esiste per entrambe.

In corrispondenza di $A \in \mathcal{I}(\ell)$ esiste $H \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $\forall x \in H \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in A$.

Allo stesso modo in corrispondenza di $B \in \mathcal{I}(m)$ esiste $K \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $\forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\} \quad g(x) \in B$.

Considerato ora $I = H \cap K$ si può dire che $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in A$ e $g(x) \in B$, quindi $f(x)g(x) \in J$, che è la tesi.

Per verificare 3) osservo preliminarmente che l'espressione $\frac{\ell}{m}$ non è forma indeterminata, cioè è una espressione con risultato in $\overline{\mathbb{R}}$ e quindi è una forma determinata, quando intanto è $m \neq 0$ (potendo però essere $m = +\infty$ oppure $m = -\infty$). Inoltre deve anche essere $\ell \neq 0$ ed infine vuol dire che è $\ell \neq \pm\infty$ ed $m \neq \pm\infty$.

Ogni altra possibilità di valori per ℓ e per m ha un risultato.

Per avere la tesi della affermazione 3) e per brevità di esposizione possiamo ricondurci al caso del prodotto, e quindi possiamo limitarci a provare che, nel caso ovvio che $\frac{1}{m}$ sia definito cioè nel caso che sia $m \neq 0$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$$

(si osservi anche che il caso $m \neq 0$ prevede che si possa avere anche $m = -\infty$ oppure $m = +\infty$, in tal caso ovviamente si pone $\frac{1}{m} = 0$).

Come per le altre due proprietà, anche in questo ultimo caso vogliamo verificare che, assegnato $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale la seguente proprietà

$$\forall J \in \mathcal{I}(\frac{1}{m}) \quad \exists A \in \mathcal{I}(m) : \quad \forall a \in A, \quad a \neq 0 \quad \frac{1}{a} \in J.$$

Per avere il risultato distinguiamo due possibilità $m = \pm\infty$ ed $m \neq \pm\infty$.

Nel primo caso poniamo $\frac{1}{m} = 0$, considerato quindi $J \in \mathcal{I}(\frac{1}{m})$ sia $\varepsilon > 0$ tale che $] -\varepsilon, \varepsilon[\subseteq J \in \mathcal{I}(\frac{1}{m})$. Se inoltre è $m = +\infty$ considero si può considerare $A =]\frac{1}{\varepsilon}, +\infty[$; se invece è $m = -\infty$ si può considerare $A =] -\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[$.

Infine consideriamo l'eventualità che sia $m \neq \pm\infty$. Dato al solito $\varepsilon > 0$ tale che $]\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon[\subseteq J \in \mathcal{I}(\frac{1}{m})$ possiamo fissare $\sigma > 0$ tale che posto $A =]m - \sigma, m + \sigma[$ si abbia la tesi.

Consideriamo intanto $\sigma > 0$ tale che si abbia anche $\sigma < \frac{|m|}{2}$, l'ulteriore condizione che deve soddisfare σ si può scrivere nel modo seguente:

$$\forall a \in A \quad \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{m} \right| = \frac{|m - a|}{|a||m|} < \frac{\sigma}{|a||m|}$$

però è anche

$$|a| = |a - m + m| \geq |m| - |a - m| > |m| - \frac{|m|}{2} = \frac{|m|}{2}.$$

Quindi risulta:

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{m} \right| < \frac{\sigma}{|a||m|} < \frac{2\sigma}{|m|^2}.$$

Pertanto le condizioni che determinano σ , in modo che si abbia la tesi, sono le seguenti: $\sigma < \frac{|m|}{2}$ e $\sigma < \frac{\varepsilon|m|^2}{2}$. $\diamond$

Come già detto in occasione dello studio del limite della funzione costante e della funzione identica, utilizzando il teorema sulle operazioni si può studiare il limite delle funzioni razionali. A tale studio ci arriveremo per gradi.

Esempio 4.2.1 *La funzione potenza di esponente $n \in \mathbb{N}$:*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = (x_0)^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

ed anche:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \text{se } n \text{ è pari} \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

La tesi si ottiene tenendo presente la regola del prodotto, e ricordando che $(+\infty)^n = +\infty$ e che $(-\infty)^n = +\infty$ se n è pari, mentre $(-\infty)^n = -\infty$ se n è dispari. Si osservi inoltre che il limite della funzione potenza nei punti $x_0 \in \mathbb{R}$ è in realtà uguale al valore della funzione in tale punto.

Questa proprietà che consente di valutare il limite per sostituzione è molto importante per il seguito ed individua una classe molto importante di funzioni, che sono le funzioni continue, di cui parleremo successivamente.

Esempio 4.2.2 *La funzione polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$.*

Assegnati $n+1$ numeri reali $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ con $a_n \neq 0$ si definisce polinomio di grado n la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che un polinomio è definito da una combinazione lineare di potenze ad esponente intero della variabile a partire dall'esponente 0 fino all'esponente n il cui coefficiente a_n è necessariamente diverso da 0, per questo motivo n si chiama il grado del polinomio.

Si osservi ancora che per $n = 1$ il polinomio definisce una retta del piano cartesiano di coefficiente angolare a_1 ed ordinata all'origine a_0 ; se invece è $n = 2$ il polinomio definisce una parabola che risulta rivolta verso l'alto, cioè è convessa, se è $a_2 > 0$; mentre risulta rivolta verso il basso, cioè è concava, se è $a_2 < 0$.

Per tale funzione polinomio, ai fini del limite, possiamo dire che:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se l'ascissa x diverge la situazione si diversifica ed il risultato varia a seconda del caso. In particolare si può dire quanto segue.

Se è $x_0 = +\infty$ allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se è } a_n > 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{se è } a_n < 0$$

Se invece si considera il limite nel punto $x_0 = -\infty$ si può affermare quanto segue.

Se n è pari e si ha anche $a_n > 0$ oppure se n è dispari e risulta $a_n < 0$ si ha: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Invece se n è dispari e si ha anche $a_n > 0$ oppure se n è pari e risulta $a_n < 0$ si ha: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Per verificare questi risultati si può ragoinare nel modo seguente.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ si possono applicare la regola dell'addizione e quella della moltiplicazione.

Per quanto riguarda i limiti nei punti $+\infty$ ed $-\infty$, allo scopo di evitare eventuali forme indeterminate del tipo $+\infty - \infty$, assegnato $x \neq 0$ il polinomio può essere scritto nella forma seguente:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{a_n} \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right].$$

Se ora si considera il limite del polinomio per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$ i termini in parentesi del tipo $\frac{1}{x^k}$, con $k = 1, 2, \dots, n-1, n$, per la regola sul rapporto hanno limite 0, quindi il limite del polinomio coincide con il limite del monomio $a_n x^n$ di grado massimo n . Tale limite si ricava facilmente utilizzando l'esempio precedente il segno di a_n e la regola della moltiplicazione.

A questo punto è possibile dire che il limite del polinomio dipende esclusivamente dal limite di x^n e dal segno di a_n , cioè è come se i monomi di grado minore di n non ci fossero. In formula questo si dice nella maniera seguente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

Esempio 4.2.3 (La funzione razionale.) Si definisce funzione razionale una funzione f che si esprime come rapporto di due funzioni polinomi. Siano allora $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ con $b_m \neq 0$ due polinomi di grado rispettivamente uguale ad n ed a m .

La funzione f definita dalla relazione $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ prende il nome di funzione razionale. L'insieme di definizione è $X = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Si osservi che per il teorema fondamentale dell'algebra le soluzioni reali della equazione $Q(x)=0$ sono al più m , tanto quanto è il grado del polinomio; quindi se $r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r \leq m$ è il numero delle soluzioni reali della equazione $Q(x) = 0$, l'insieme X risulta esattamente unione di $r+1$ intervalli di $\mathbb{R}$. Se risulta $r = 0$ allora $X = \mathbb{R}$.

Ne consegue allora che l'insieme $\mathcal{D}(X)$ dei punti di accumulazione di X coincide con $\overline{\mathbb{R}}$, quindi per una funzione razionale ha senso considerare il limite in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Allora è possibile affermare che:

$$1. \forall x_o \in X \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o).$$

$$2. \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se si ha } n > m \quad \text{e se è } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{se è } n > m \quad \text{e se è } \frac{a_n}{b_m} < 0 \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se è } n = m \\ 0 & \text{se è } n < m. \end{cases}$$

$$3. \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se è: } n > m, n - m \text{ pari, cioè } n - m = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ e se è } \frac{a_n}{b_m} > 0, \text{ oppure } n > m, n - m \text{ dispari, cioè } n - m = 2k - 1 \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ e se è } \frac{a_n}{b_m} < 0.$$

$$4. \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ se è: } n > m, n - m \text{ pari, cioè } n - m = 2k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ e se è } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ oppure } n > m, n - m \text{ dispari, cioè } n - m = 2k - 1 \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ e se è } \frac{a_n}{b_m} > 0.$$

$$5. \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{se è } n = m, \\ 0 & \text{se è } n < m. \end{cases}$$

La dimostrazione di 1 segue dal teorema sulle operazioni, quindi anche le funzioni razionali hanno la proprietà secondo cui il limite in un punto $x_o \in X$ è possibile calcolarlo per sostituzione della generica ascissa x di X con la particolare ascissa x_o in cui si vuole valutare il limite.

La verifica delle proprietà 2., 3., 4., e 5. non può essere fatta utilizzando la regola del rapporto perché con tale procedura si ottiene la forma indeterminata $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Invece per verificare tali proprietà si possono scrivere i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, per ogni $x \neq 0$, rispettivamente nella maniera seguente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{a_n} \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right]$$

e

$$Q(x) = b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 =$$

$$b_m x^m \left[1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{b_2}{b_m} \frac{1}{x^{m-2}} + \frac{b_1}{b_m} \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m} \frac{1}{x^m} \right]$$

Per la funzione razionale f assegnata si ha:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{a_n} \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m} \frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{b_2}{b_m} \frac{1}{x^{m-2}} + \frac{b_1}{b_m} \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m} \frac{1}{x^m}}$$

Quindi il limite di f per x che diverge positivamente o negativamente è determinato dal limite della funzione $g(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ dal momento che la funzione espressa come frazione, per la regola del rapporto, ha limite uguale ad 1. La tesi è allora ottenuta.

Si osservi infine che non è stato considerato il limite della funzione f nei punti $x_o \in \mathbb{R} \setminus X$. In tali punti x_o , se ci sono, si ha sicuramente $Q(x_o) = 0$.

In questa ultima eventualità, cioè se si considera il limite in un punto x_o in cui si ha anche $Q(x_o) = 0$, si possono presentare due possibilità:

$$P(x_o) = 0$$

oppure

$$P(x_o) \neq 0.$$

Tali situazioni saranno trattate in due modi nettamente diversi tra loro.

Se risulta $P(x_o) = 0$ il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

In tal caso vuol dire che sia il polinomio P e sia il polinomio Q sono divisibili per il binomio $x - x_o$. Utilizzando allora, ad esempio, la regola di Ruffini si possono decomporre sia P e sia Q . Quindi esistono $p \leq n$ e $q \leq m$ tale che si abbia:

$$P(x) = (x - x_o)^p P_1(x) \quad \text{e} \quad Q(x) = (x - x_o)^q Q_1(x)$$

con

$$P_1(x_o) \neq 0 \quad \text{e} \quad Q_1(x_o) \neq 0.$$

Se risulta $p > q$ si ha:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_o)^{p-q} P_1(x)}{Q_1(x)}$$

e quindi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{(x - x_o)^{p-q} P_1(x)}{Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{(x_o - x_o)^{p-q} P_1(x_o)}{Q_1(x_o)} = 0.$$

Se risulta $p = q$ si ha:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

e quindi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_o)}{Q_1(x_o)}.$$

Se infine risulta $p < q$ si ha:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x - x_o)^{q-p} Q_1(x)}$$

e quindi il limite si presenta nella forma:

$$\frac{P_1(x_o)}{0}$$

che è una forma del tipo $\frac{\lambda}{0}$. Tale tipo di situazione sarà esaminata da un teorema successivo.

Consideriamo ora alcuni enunciati che esaminano alcune situazioni eccezionali relativamente alle operazioni di addizione, moltiplicazione e divisione tra funzioni.

Teorema 4.2.2 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che*

$$1. \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = +\infty.$$

$$2. \exists k \in \mathbb{R} \text{ ed } \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad g(x) \geq k.$$

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

Dimostrazione: Sia $A \in \mathcal{I}(+\infty)$ e sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $]a, +\infty[\subseteq A$. In corrispondenza di $]a - k, +\infty[\in \mathcal{I}(+\infty)$, per l'ipotesi 1), $\exists H \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che: $\forall x \in H \cap X \setminus \{x_o\}$ si ha $f(x) \in]a - k, +\infty[$, cioè $f(x) > a - k$.

Se ora considero $B = H \cap I$, risulta naturalmente $B \in \mathcal{I}(x_o)$, ed inoltre $\forall x \in B \cap X \setminus \{x_o\}$ è $f(x) + g(x) > a - k + k = a$ cioè $f(x) + g(x) > a$ cioè $f(x) + g(x) \in]a, \infty[\subseteq A$. Quindi si ha la tesi. $\diamond$

Teorema 4.2.3 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che*

$$1. \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = -\infty.$$

$$2. \exists k \in \mathbb{R} \text{ ed } \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad g(x) \leq k.$$

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x) + g(x)) = -\infty.$$

Dimostrazione: È simile a quella del teorema (4.2.2). $\diamond$

Teorema 4.2.4 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che*

$$1. \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = 0.$$

$$2. \exists k \in \mathbb{R} \quad k \geq 0 \quad \text{ed} \quad \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad -k \leq g(x) \leq k.$$

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} (f(x)g(x)) = 0.$$

Dimostrazione: Sia $A \in \mathcal{I}(0)$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che: $] -\varepsilon, \varepsilon[\subseteq A$. In corrispondenza di $H =] -\frac{\varepsilon}{k+1}, \frac{\varepsilon}{k+1}[\in \mathcal{I}(0)$, per l'ipotesi 1), $\exists K \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in] -\frac{\varepsilon}{k+1}, \frac{\varepsilon}{k+1}[$ cioè $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{k+1}$.

Considerato poi $B = K \cap I$, si ha ovviamente $B \in \mathcal{I}(x_o)$ ed inoltre $\forall x \in B \cap X \setminus \{x_o\}$ risulta: $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{k+1}k < \varepsilon$, cioè $f(x)g(x) \in] -\varepsilon, \varepsilon[\subseteq A$. $\diamond$

Teorema 4.2.5 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che*

$$1. \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = 0.$$

$$2. \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) > 0.$$

Tesi: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Dimostrazione: Sia $A \in \mathcal{I}(+\infty)$ e sia $a > 0$ tale che: $]a, +\infty[\subseteq A$. Considero allora $H =]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\in \mathcal{I}(0)$ e, per l'ipotesi 1), $\exists K \in \mathcal{I}(x_0) : \forall x \in K \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha: $f(x) \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$ cioè $-\frac{1}{a} < f(x) < \frac{1}{a}$.

Considerato allora $B = K \cap I$ si ha: $\forall x \in B \cap X \setminus \{x_0\}$ $0 < f(x) < \frac{1}{a}$, e quindi $\frac{1}{f(x)} > a$, cioè $\frac{1}{f(x)} \in]a, +\infty[\subseteq A$. $\diamond$

4.3 Teoremi di esistenza dei limiti

In questo paragrafo considereremo risultati che garantiscono l'esistenza del limite di una funzione.

Definizione 4.3.1 (punto di accumulazione da sinistra) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(x_0 si dice punto di accumulazione da sinistra per X) $\iff_{def} (\forall I \in \mathcal{I}(x_0) \quad I \cap X \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset)$

Indicheremo con $\mathcal{D}^-(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione da sinistra per X .

Definizione 4.3.2 (punto di accumulazione da destra) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(x_0 si dice punto di accumulazione da destra per X) $\iff_{def} (\forall I \in \mathcal{I}(x_0) \quad I \cap X \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset)$

Indicheremo con $\mathcal{D}^+(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione da destra per X .

Esempio 4.3.1 1. Se $X =]a, b[$, con $a < b$, allora $\mathcal{D}^-(X) =]a, b[$ e $\mathcal{D}^+(X) = [a, b[$.

2. Se $X = \mathbb{N}$ allora $\mathcal{D}^-(X) = \{+\infty\}$ e $\mathcal{D}^+(X) = \emptyset$.

3. Se $X = \mathbb{R}$, allora $\mathcal{D}^-(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $\mathcal{D}^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Teorema 4.3.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, si ha:

$$\mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X) \subseteq \mathcal{D}(X) \quad e \quad \mathcal{D}(X) = \mathcal{D}^-(X) \cup \mathcal{D}^+(X).$$

Dimostrazione: L'inclusione $\mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$ è ovvia.

Verifichiamo invece che è $\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{D}^-(X) \cup \mathcal{D}^+(X)$ e che è $\mathcal{D}^-(X) \cup \mathcal{D}^+(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$.

Per provare la prima inclusione ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista $\bar{x} \in \mathcal{D}(X)$ tale che $\bar{x} \notin \mathcal{D}^-(X)$ ed $\bar{x} \notin \mathcal{D}^+(X)$. Poichè $\bar{x} \notin \mathcal{D}^-(X)$ esiste $\overline{H} \in \mathcal{I}(\bar{x})$ tale che $\overline{H} \cap X \cap]-\infty, \bar{x}[= \emptyset$, e poichè $\bar{x} \notin \mathcal{D}^+(X)$ esiste $\overline{K} \in \mathcal{I}(\bar{x})$ tale che $\overline{K} \cap X \cap]\bar{x}, +\infty[= \emptyset$.

È possibile allora considerare $\overline{I} = \overline{H} \cap \overline{K}$ per il quale si ha $\overline{I} \in \mathcal{I}(\bar{x})$ e per esso si ha: $\overline{I} \cap X \cap]-\infty, \bar{x}[= \emptyset$ ed $\overline{I} \cap X \cap]\bar{x}, +\infty[= \emptyset$. Considerando però l'unione si ha: $\overline{I} \cap X \cap \{\bar{x}\} =$

$(\bar{I} \cap X \cap] - \infty, \bar{x}[) \cup (\bar{I} \cap X \cap] \bar{x}, +\infty[) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Questo però implica che $\bar{x} \notin \mathcal{D}(X)$, mentre si aveva $\bar{x} \in \mathcal{D}(X)$.

Viceversa provo che $\mathcal{D}^-(X) \cup \mathcal{D}^+(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$, e per questo verifico che si ha $\mathcal{D}^-(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$ e $\mathcal{D}^+(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$.

Per verificare la prima inclusione considero $x_o \in \mathcal{D}^-(X)$ allora $\forall I \in \mathcal{I}(x_o)$ è $I \cap X \cap] - \infty, x_o[\neq \emptyset$. Poichè però risulta $I \cap X \cap] - \infty, x_o[\subseteq I \cap X \setminus \{x_o\}$, segue che è: $I \cap X \setminus \{x_o\} \neq \emptyset$. Quindi $x_o \in \mathcal{D}(X)$.

In modo analogo si vede che: $\mathcal{D}^+(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$. $\diamond$

Definizione 4.3.3 (limite da sinistra) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_o \in \mathcal{D}^-(X)$ ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell \right) \iff_{def} (\forall J \in \mathcal{I}(\ell) \ \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in I \cap X \cap] - \infty, x_o[\quad f(x) \in J).$$

Definizione 4.3.4 (limite da destra) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_o \in \mathcal{D}^+(X)$ ed $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell \right) \iff_{def} (\forall J \in \mathcal{I}(\ell) \ \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in I \cap X \cap] x_o, +\infty[\quad f(x) \in J).$$

Evidentemente tutti i teoremi visti in precedenza: unicità del limite, confronto, permanenza del segno, sulle operazioni con le relative eccezioni si possono riformulare, con le ovvie modifiche, sia nel caso che il punto x_o sia di accumulazione da sinistra per X e di conseguenza per il limite da sinistra e sia nel caso che il punto sia di accumulazione x_o da destra e quindi per il limite da destra.

Si può inoltre formulare il seguente risultato:

Teorema 4.3.2 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \iff (\exists \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell).$$

Dimostrazione: Verifico l'implicazione da sinistra a destra. Suppongo per questo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$ e provo intanto che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell$. Applicando la definizione si deve provare che:

$$\forall J \in \mathcal{I}(\ell) \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \cap] - \infty, x_o[f(x) \in J.$$

Dato allora $J \in \mathcal{I}(\ell)$, per ipotesi esiste $I \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}$ si ha: $f(x) \in J$. Poichè però, per ipotesi, si ha anche $I \cap X \cap] - \infty, x_o[\neq \emptyset$, essendo inoltre $I \cap X \cap] - \infty, x_o[\subseteq I \cap X \setminus \{x_o\}$ si ha la tesi. In modo analogo si prova che esiste $\lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell$.

Viceversa supponendo che: $\exists \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = \ell$ e che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = \ell$, occorre verificare che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$.

Fissato allora $J \in \mathcal{I}(\ell)$ per ipotesi $\exists A \in \mathcal{I}(x_0) \forall x \in A \cap X \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$ ed inoltre $\exists B \in \mathcal{I}(x_0) \forall x \in B \cap X \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$. Considerato ora $I = A \cap B$ si ha: $I \cap X \setminus \{x_0\} = (I \cap X \cap]-\infty, x_0[) \cup (I \cap X \cap]x_0, +\infty[) \subseteq (A \cap X \cap]-\infty, x_0[) \cup (B \cap X \cap]x_0, +\infty[)$. Pertanto $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $x \in A \cap X \cap]-\infty, x_0[$ oppure $x \in B \cap X \cap]x_0, +\infty[$ e quindi comunque si ha $f(x) \in J$, che è ciò che si vuole provare. $\diamond$

Vale la pena esplicitare, in questo caso, l'eventualità di non esistenza del limite di una funzione:

Teorema 4.3.3 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$ ed $x_0 \in \mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X)$. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Tesi:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \left\{ \begin{array}{l} [(\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)) \text{ oppure } (\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)) \text{ oppure} \\ (\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell, \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \text{ e si ha } \ell \neq m)]. \end{array} \right.$$

È possibile enunciare ora il seguente enunciato:

Teorema 4.3.4 (limite sinistro per le funzioni monotone) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathcal{D}^-(X)$.*

Tesi:

1. $\exists I \in \mathcal{I}(x_0) : f \text{ crescente su } I \cap X \cap]-\infty, x_0[\implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup f(I \cap X \cap]-\infty, x_0[)$.
2. $\exists I \in \mathcal{I}(x_0) : f \text{ decrescente su } I \cap X \cap]-\infty, x_0[\implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf f(I \cap X \cap]-\infty, x_0[)$.

Dimostrazione: Provo a). Sia $\ell = \sup f(X \cap]-\infty, x_0[)$. Per le proprietà che caratterizzano l'estremo superiore si ha:

- 1) $\ell \geq f(x) \forall x \in X \cap]-\infty, x_0[$,
- 2) $\forall t \in \mathbb{R}, t < \ell, \exists \bar{x} \in X \cap]-\infty, x_0[: t < f(\bar{x}) \leq \ell$.

Per avere la tesi occorre verificare che $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$; per questo sia $J \in \mathcal{I}(\ell)$ esiste allora $t \in \mathbb{R}, t < \ell$ tale che $(\mathbb{R} \cap]t, \ell]) \subseteq J$ di conseguenza, utilizzando la proprietà 2) dell'estremo superiore prima citata, si può considerare $\bar{x} \in X \cap]-\infty, x_0[$ tale che $t < f(\bar{x}) \leq \ell$.

A questo punto posso considerare $I =]\bar{x}, +\infty[$, per il quale ovviamente si ha $I \in \mathcal{I}(x_0)$ perchè risulta $\bar{x} < x_0$. Inoltre $\forall x \in I \cap X \cap]-\infty, x_0[$ si ha: $x \in]\bar{x}, +\infty[\cap X \cap]-\infty, x_0[$ cioè: $x \in]\bar{x}, x_0[\cap X$ e allora è: $f(\bar{x}) \leq f(x)$ perchè f è crescente su $X \cap]-\infty, x_0[$. Inoltre è anche $f(x) \leq \ell$ per la 1) prima detta.

Pertanto $\forall x \in I \cap X \cap]-\infty, x_0[$ si ha: $t < f(\bar{x}) \leq f(x) \leq \ell$ e quindi $f(x) \in \mathbb{R} \cap]t, \ell] \subseteq J$ cioè $f(x) \in J$. La dimostrazione di b) è simile alla a), occorre naturalmente considerare in questo caso le proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore. $\diamond$

Teorema 4.3.5 (limite destro per le funzioni monotone) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathcal{D}^+(X)$.*

Tesi:

1. $\exists I \in \mathcal{I}(x_0) : f \text{ crescente su } I \cap X \cap]x_0, +\infty[\implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf f(I \cap X \cap]x_0, +\infty[)$.

$$2. \exists I \in \mathcal{I}(x_0) : f \text{ decrescente su } I \cap X \cap]x_0, +\infty[\implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup f(I \cap X \cap]x_0, +\infty[).$$

Esempio 4.3.2 (successione di Nepero (o di Eulero)) Considero la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione: $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n \forall n \in \mathbb{N}$. Provo che:

1. $f(n) \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $2 \leq f(n) < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $f(n) < f(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

Prima di provare queste tre proprietà della successione di Nepero possiamo affermare, utilizzando il precedente teorema sul limite delle funzioni monotone, che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sup \{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tale limite viene indicato di solito con e (iniziale di Eulero), inoltre per il teorema del confronto (o anche per le proprietà dell'estremo superiore) si può dire che è $2 \leq e \leq 3$; in realtà si prova che è $2 \leq e < 3$ e che $e \notin \mathbb{Q}$, cioè il numero di Nepero e è un numero irrazionale compreso tra 2 e 3.

La 1) è ovvia dal momento che $f(n)$ è potenza con esponente n di un numero razionale.

Per provare poi le proprietà 2) e 3) possiamo utilizzare lo sviluppo di Newton della potenza intera di un binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$ essendo $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n! = n(n-1)(n-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ se è $n \geq 1$. Come di consueto si pone anche $0! = 1$.

Ponendo poi $a = 1$ e $b = \frac{1}{n}$ si ha:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}.$$

Osserviamo intanto che è $f(1) = 2$, inoltre per $n \geq 2$ si ha:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}.$$

Per avere la proprietà 2) noto che è $f(n) \geq 2$, per provare poi che è anche $f(n) < 3$ osservo che, per $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, si ha: $k! \geq 2^{k-1}$ e quindi $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ mentre è:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{k-1}{n}) < 1.$$

Pertanto risulta:

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n = 2 + \sum_{k=2}^n (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{k-1}{n}) \frac{1}{k!} <$$

$$2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{n^k} < 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3.$$

Per provare la proprietà 3), cioè che $f(n) < f(n+1) \forall n \in \mathbb{N}$, osservo intanto che risulta:

$$f(n+1) = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!},$$

quindi per dimostrare la disuguaglianza richiesta notiamo che intanto $f(n+1)$ ha un addendo in più di $f(n)$ inoltre ovviamente risulta $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ per ogni $k = 2, 3, \dots, n$. $\diamond$

Teorema 4.3.6 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ monotona su X .*

Tesi:

1. f crescente su $X \implies \forall x_0 \in \mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
2. f decrescente su $X \implies \forall x_0 \in \mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Dimostrazione: a) Sia $x_0 \in \mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X)$ e sia f crescente su X , quindi si ha $f(x) \leq f(y) \forall x \in X \cap]-\infty, x_0[$ e $\forall y \in X \cap]x_0, +\infty[$.

Per la proprietà a) dei teoremi (4.3.6) e (4.3.8), si ha allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup f(X \cap]-\infty, x_0]) \leq \inf f(X \cap]x_0, +\infty[) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

La proprietà b) si prova in modo simile. $\diamond$

Sarà il caso di osservare che per una funzione f monotona sono garantiti i limiti da sinistra e da destra in un punto che sia di accumulazione rispettivamente da sinistra e da destra per l'insieme di definizione X di f .

Inoltre in base al teorema precedente è anche stabilito un ordine tra i limiti sinistro e destro.

Non sempre però è garantita l'esistenza del limite di una funzione monotona in un punto di accumulazione a sinistra ed a destra.

Si consideri per questo la funzione parte intera: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = [x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$, essendo la parte intera $[x]$ di x definita dalla relazione: $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, cioè $[x]$ è il massimo tra i numeri interi che sono minori o uguali ad x .

Per la funzione parte intera sono vere le seguenti proprietà:

1. $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. f è monotona crescente su $\mathbb{R}$ cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \implies f(x_1) = [x_1] \leq [x_2] = f(x_2)$.
3. $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$ ed $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$

4. $\exists \lim_{x \rightarrow x_o^-} [x] = \begin{cases} [x_o] & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ [x_o] - 1 & \forall x_o \in \mathbb{Z} \end{cases}$
5. $\exists \lim_{x \rightarrow x_o^+} [x] = [x_o] \quad \forall x \in \mathbb{N}.$

Si può osservare intanto che la funzione parte intera ha limite in x_o se e solo se x_o non è un numero intero.

Per verificare la 1. basta osservare che, assegnato $x \in \mathbb{R}$, esso è maggiorante per l'insieme degli interi che sono minori o uguali ad x , inoltre è ovvio che risulta $x < [x] + 1$.

Per verificare la 2. siano assegnati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ si ha $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x_1\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x_2\}$, quindi è $[x_1] \leq [x_2]$.

La 3. si prova tenendo presente il teorema del confronto, la 1. e la proprietà di divergenza a $-\infty$ ed a $+\infty$ della funzione identica. La verifica di 4. e di 5. si fa tenendo presente i teoremi sulle funzioni monotone.

È possibile definire anche la funzione parte frazionaria o mantissa di un numero ponendo:

$$(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x) =_{def} x - [x].$$

Le principali proprietà rispetto alla operazione di limite sono le seguenti:

1. $0 \leq (x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $(x) = (x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (cioè la funzione parte frazionaria è periodica di periodo 1).
3. $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} (x)$ ed inoltre $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_o^-} (x) = \begin{cases} (x_o) & \text{se } x_o \notin \mathbb{Z}; \\ 1 & \text{se } x_o \in \mathbb{Z} \end{cases}.$
5. $\lim_{x \rightarrow x_o^+} (x) = (x_o). \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

La verifica è lasciata al lettore.

Il seguente teorema, di cui viene omessa la dimostrazione, esprime come sia fatto l'insieme dei punti in cui una funzione monotona non ammette limite.

Teorema 4.3.7 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ monotona. Pongo $E = \{x_o \in \mathcal{D}^-(X) \cap \mathcal{D}^+(X) : \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x)\}$.*

Tesi: E è vuoto oppure finito o al più numerabile.

Omettiamo la dimostrazione.

Teorema 4.3.8 (delle tre funzioni) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che:*

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = \ell, \exists \lim_{x \rightarrow x_o} h(x) = \ell;$

2. $\exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \ g(x) \leq f(x) \leq h(x).$

Tesi: $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell.$

Dimostrazione: Occorre provare che $\forall A \in \mathcal{I}(\ell) \ \exists B \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in B \cap X \setminus \{x_o\} \ f(x) \in A.$

Assegnato allora $A \in \mathcal{I}(\ell)$ esiste $J \in \mathcal{I}(x_o)$ con J intervallo e con $J \subseteq A$, ora in corrispondenza di J per l'ipotesi 1) esiste $H \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in H \cap X \setminus \{x_o\} \ g(x) \in J$ ed inoltre esiste $K \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\} \ h(x) \in J.$

Considerato ora $B = I \cap H \cap K$, si ha $B \in \mathcal{I}(x_o)$ ed inoltre $\forall x \in B$ si ha $g(x) \leq f(x) \leq h(x).$

Poichè J è intervallo e poichè si ha $g(x) \in J$ ed $h(x) \in J$, risulta anche $f(x) \in J.$ Quindi $\forall x \in B \cap X \setminus \{0\} \ f(x) \in A. \diamond$

Il teorema appena considerato, come tutti i teoremi sui limiti finora enunciati, si può riformulare in termini di limite sinistro o di limite destro con le ovvie modifiche.

Mediante il teorema delle tre funzioni è possibile provare i seguenti due risultati:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Per provare il primo limite considero $x > 1$ e allora, se $[x]$ è la parte intera di x , si ha: $[x] \leq x < [x] + 1$, pertanto si ha anche $1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$, considerando poi per ciascuno di questi termini la potenza di esponente x le disuguaglianze si conservano:

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x$$

e infine risulta anche:

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Posto allora $g(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}$ e $h(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$ è possibile affermare che per entrambe le funzioni si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e.$

Infatti risulta:

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \left[\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]+1}\right]^{\frac{[x]}{[x]+1}}$$

ed

$$h(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right).$$

Quindi la funzione g è espressa come potenza di potenza, cioè $g(x) = (a(x))^{b(x)}$ con $a(x) = (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}$ e $b(x) = \frac{[x]}{[x]+1}$.

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = e$ perchè $a(x)$ è del tipo della successione di Nepero, ed inoltre si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 1$ perchè $b(x)$ è rapporto di espressioni polinomiali entrambe di grado 1 nella variabile $[x]$.

Infine la funzione h , ha limite ancora il numero e , quando $x \rightarrow +\infty$, perchè è espressa come prodotto di una funzione che ha lo stesso comportamento di una successione di Nepero e di una funzione il cui limite per $x \rightarrow +\infty$ è uguale ad 1.

Per provare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si può tenere presente la definizione della funzione $\sin x$.

Dalla sua definizione mediante la circonferenza goniometrica si deduce che:

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad 0 < \sin x < x < \tan x$$

quindi si ha:

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \implies 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

In realtà poi si vede che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$$

perchè le funzioni $\cos x$ e $\frac{\sin x}{x}$ sono pari.

Pertanto poichè $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ si ha la tesi per il teorema delle tre funzioni.

Teorema 4.3.9 (sul limite delle funzioni composte) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Suppongo che:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$,
2. $\exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \neq \ell$.

Inoltre siano assegnati $Y \subseteq \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

3. $f(X) \subseteq Y$ ed $\ell \in \mathcal{D}(Y)$;
4. $\exists \lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = m$.

Tesi: $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} g(f(x)) = m$.

Dimostrazione: Sia $A \in \mathcal{I}(m)$, per l'ipotesi 4), $\exists B \in \mathcal{I}(\ell) : \forall y \in B \cap Y \setminus \{\ell\} \quad g(y) \in A$.

Ora per l'ipotesi 1), in corrispondenza di $B \in \mathcal{I}(\ell)$ $\exists H \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in H \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in B$.

Se adesso considero $K = I \cap H$ si ha intanto $K \in \mathcal{I}(x_o)$; inoltre $\forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\}$ si ha $f(x) \neq \ell$ ed $f(x) \in B$, cioè $\forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\} \quad f(x) \in B \cap Y \setminus \{\ell\}$ da cui segue allora che $\forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\} \quad g(f(x)) \in A$. $\diamond$

Teorema 4.3.10 (caratterizzazione della esistenza del limite mediante successioni)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \iff \begin{cases} (\forall s : \mathbb{N} \rightarrow X \setminus \{x_o\} \text{ tale che} \\ \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = x_o \text{ si ha: } \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)) = \ell). \end{cases}$$

Dimostrazione: L'implicazione da sinistra a destra è conseguenza del teorema di esistenza del limite sulle funzioni composte.

Viceversa per assurdo supponiamo che sia falso che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$; quindi, negando la definizione di limite,

$$\exists \bar{J} : \forall I \in \mathcal{I}(x_o) \exists x \in I \cap X \setminus \{x_o\} : f(x) \notin \bar{J}.$$

Se ora è $x_o \in \mathbb{R}$ considero $I_n = I(x_o, \frac{1}{n}) =]x_o - \frac{1}{n}, x_o + \frac{1}{n}[$, trovo $x_n \in I_n \cap X \setminus \{x_o\}$ tale che $f(x_n) \notin \bar{J}$.

In questo modo resta individuata una successione $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ per la quale risulta $s(n) = x_n \neq x_o \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = x_o$ ma $f(s(n)) \notin \bar{J}$ che vuol dire che non è vero che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)) = \ell$.

Quindi non è vera l'ipotesi.

In modo analogo si ragiona nel caso in cui $x_o \notin \mathbb{R}$.

Più in particolare se è $x_o = +\infty$ si può considerare $I_n = I(+\infty, n) =]n, +\infty[$ mentre se è $x_o = -\infty$ si può prendere $I_n = I(-\infty, n) =]-\infty, -n[$ per ottenere sempre, come nel caso precedente in cui $x_o \in \mathbb{R}$, una successione $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ per la quale risulta $s(n) \neq +\infty$ ($s(n) \neq -\infty$) $\forall n \in \mathbb{N}$ ed inoltre $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = +\infty$ ($-\infty$) e però non è vero che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)) = \ell$, evidentemente contro l'ipotesi. $\diamond$

4.4 Massimo limite e minimo limite di una funzione

Definizione 4.4.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Si definisce *minimo limite* o *limite inferiore* di f in x_o , e si indica con $\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x)$, il valore di $\mathbb{R}$ definito dalla relazione:

$$\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{I}(x_o)} \left[\inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \right].$$

Si definisce *massimo limite* o *limite superiore* di f in x_o , e si indica con $\limsup_{x \rightarrow x_o} f(x)$, il valore di $\mathbb{R}$ definito dalla relazione:

$$\limsup_{x \rightarrow x_o} f(x) = \inf_{I \in \mathcal{I}(x_o)} \left[\sup_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \right].$$

Come si può constatare facilmente dalla definizione, le due operazioni appena descritte $\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x)$ e $\limsup_{x \rightarrow x_o} f(x)$ in un punto di accumulazione per X sono sempre definite, a differenza

della operazione di limite che a volte può non avere risultato. Anzi a questo proposito si ha il seguente risultato.

Teorema 4.4.1 *Dati $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si ha:*

$$1. \liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_o} f(x)$$

$$2. \forall s : \mathbb{N} \rightarrow X \setminus \{x_o\} \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = x_o \text{ si ha:}$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)) \leq \limsup_{x \rightarrow x_o} f(x).$$

3.

$$\left[\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \right] \iff \left[\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \right]$$

Dimostrazione: 1) Per avere la tesi è sufficiente osservare che si ha:

$$\forall I, J \in \mathcal{I}(x_o) \quad \inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{x \in J \cap X \setminus \{x_o\}} f(x).$$

Infatti assegnati $I, J \in \mathcal{I}(x_o)$ si ha ancora: $I \cap J \in \mathcal{I}(x_o)$. Allora risulta:

$$\inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \inf_{x \in I \cap J \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{x \in I \cap J \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{x \in J \cap X \setminus \{x_o\}} f(x).$$

Pertanto, per definizione di estremo inferiore, si ha:

$$\forall I \in \mathcal{I}(x_o) \quad \inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \inf_{J \in \mathcal{I}(x_o)} \sup_{x \in J \cap X \setminus \{x_o\}} f(x)$$

e infine per lo stesso motivo risulta

$$\sup_{I \in \mathcal{I}(x_o)} \inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \inf_{J \in \mathcal{I}(x_o)} \sup_{x \in J \cap X \setminus \{x_o\}} f(x)$$

cioè la tesi.

2) Sia $s : \mathbb{N} \rightarrow X \setminus \{x_o\}$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = x_o$, allora: $\forall I \in \mathcal{I}(x_o)$ si ha: $s(\mathbb{N}) \cap I \setminus \{x_o\}$ e quindi è

$$\forall I \in \mathcal{I}(x_o) \quad \inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \inf_{x \in I \cap s(\mathbb{N}) \setminus \{x_o\}} f(x)$$

da cui segue ovviamente:

$$\sup_{I \in \mathcal{I}(x_o)} \inf_{x \in I \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{I \in \mathcal{I}(x_o)} \inf_{x \in I \cap s(\mathbb{N}) \setminus \{x_o\}} f(x).$$

Inoltre dato che la successione s ha per ipotesi come limite il punto x_o , considerato $I \in \mathcal{I}(x_o)$ esiste $J \in \mathcal{I}(+\infty)$ tale che $\forall n \in J \cap \mathbb{N} \quad s(n) \in I$ e quindi

$$\inf_{x \in I \cap s(\mathbb{N}) \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \inf_{n \in J \cap s(\mathbb{N})} f(s(n))$$

e allora risulta:

$$\sup_{I \in \mathcal{I}(x_o)} \inf_{x \in I \cap s(\mathbb{N}) \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{J \in \mathcal{I}(+\infty)} \inf_{n \in J \cap s(\mathbb{N})} f(s(n)) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)).$$

Quindi è

$$\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)).$$

In modo analogo si verifica che è

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(s(n)) \leq \limsup_{x \rightarrow x_o} f(x).$$

3) Verifico l'implicazione da sinistra a destra $\Rightarrow$).

Suppongo allora che $\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$ e verifico che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$.

Sia quindi $H \in \mathcal{I}(\ell)$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $I(\ell, \varepsilon) \subseteq H$.

(Si tenga conto che $I(\ell, \varepsilon)$ cambia a seconda che ℓ sia un numero reale o no. In particolare si ha $I(\ell, \varepsilon) =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ se risulta $\ell \in \mathbb{R}$, $I(\ell, \varepsilon) =]-\infty, -\varepsilon[$ se è $\ell = -\infty$ ed infine è $I(\ell, \varepsilon) =]\varepsilon, +\infty[$ nel caso $\ell = +\infty$).

Sia ora $\ell \in \mathbb{R}$.

Allora, per ipotesi, essendo $\liminf_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$, per le proprietà dell'estremo superiore esiste $A \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che

$$\inf_{x \in A \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \in I(\ell, \varepsilon) =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

ed inoltre essendo $\limsup_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$, esiste $B \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che

$$\sup_{x \in B \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \in I(\ell, \varepsilon) =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Se ora si considera $K = A \cap B$ si può affermare che, essendo

$$\inf_{x \in A \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \inf_{x \in K \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{x \in K \cap X \setminus \{x_o\}} f(x) \leq \sup_{x \in B \cap X \setminus \{x_o\}} f(x)$$

ed essendo $I(\ell, \varepsilon)$ un intervallo, risulta:

$$f(x) \in I(\ell, \varepsilon) \quad \forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\}$$

e quindi

$$f(x) \in H \quad \forall x \in K \cap X \setminus \{x_o\}.$$

CAPITOLO 5

LA CONTINUITÀ

5.1 Funzioni continue

Definizione 5.1.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f \text{ è continua in } x_o) \iff_{def} \begin{cases} x_o \in X \setminus \mathcal{D}(X) \text{ (cioè } x_o \text{ è isolato)} \\ \text{oppure} \\ x_o \in X \cap \mathcal{D}(X) \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o). \end{cases}$$

$$(f \text{ è continua su } X) \iff_{def} (\forall x_o \in X \text{ } f \text{ è continua in } x_o).$$

La nozione di continuità su un insieme X porta a dire che la definizione di funzione continua è di tipo puntuale.

È di facile verifica la seguente caratterizzazione di funzione continua, che è del tipo del limite.

Teorema 5.1.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \text{ è continua in } x_o) \iff (\forall J \in \mathcal{I}(f(x_o)) \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \forall x \in I \cap X \Rightarrow f(x) \in J).$$

Dim.

Sia f continua. Se x_o è isolato sia I_o un intorno di x_o tale che $I_o \cap X = \{x_o\}$. In tal caso, fissato un qualunque intorno $J \in \mathcal{I}(f(x_o))$ si può considerare l'intorno I_o che garantisce la tesi. Se invece x_o è di accumulazione l'ipotesi di esistenza del limite fornisce la tesi.

Il viceversa è altrettanto semplice. $\diamond$

Citiamo di seguito alcuni esempi di funzioni continue sul loro insieme di definizione.

1. Una qualunque successione di numeri reali, cioè una qualunque funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, perchè, come già osservato a proposito della definizione di punto di accumulazione, i punti di $\mathbb{N}$ sono tutti isolati.
2. La funzione costante $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ assegnato.

3. La funzione $f(x) = x$ identità di $\mathbb{R}$.
4. La funzione esponenziale $f(x) = a^x$, con $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ assegnato.
5. Le funzioni trigonometriche $f(x) = \sin x$ ed $f(x) = \cos x$.

La verifica della continuità degli esempi 2), 3), 4) e 5) è facile conseguenza della definizione di limite, già a suo tempo considerata.

È utile considerare anche un esempio di funzione non continua. La funzione parte intera è una di queste. Essa è definita in $\mathbb{R}$ ed ha valori in $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dalla relazione

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Indicheremo con $f(x) = [x]$. Una proprietà fondamentale della funzione data si può esporre come segue:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{si ha: } f(x) = n \quad \forall x \in [n, n+1[$$

quindi f è costante su ogni intervallo del tipo $[n, n+1[$.

Ne segue che: f non è iniettiva, quindi non è invertibile; essendo poi anche $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ essa non è nemmeno suriettiva. Inoltre f è continua su ogni intervallo aperto del tipo $]n, n+1[$ essendo ivi costante, infine f non è continua in ogni punto di ascissa intera $n \in \mathbb{Z}$ infatti fissato $n \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n.$$

È opportuno ora considerare alcuni risultati che forniscono anche informazioni sulla struttura dell'insieme delle funzioni reali e continue su un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$.

Teorema 5.1.2 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue in x_0 . Allora:*

1. *assegnati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha f + \beta g$ è continua in x_0 ;*
2. *fg è continua in x_0 ;*
3. *se $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 .*

Dim.:

La verifica della tesi delle proprietà 1), 2) e 3) è inutile nel caso in cui il punto x_0 è isolato. Nel caso invece in cui x_0 è di accumulazione per X , per ipotesi si ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Per il teorema sulle operazioni si ha anche:
per l'addizione:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$$

per la moltiplicazione:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$$

per la divisione:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Le tre affermazioni appena considerate forniscono la tesi. $\diamond$

Indicato con $C(X)$ l'insieme delle funzioni reali e continue definite sull'insieme X , la proprietà 1) dice che esso è uno spazio lineare (o vettoriale) reale; inoltre le proprietà 1) e 2) consentono di dire che $C(X)$ è un'algebra.

È anche possibile, utilizzando la funzione identità la funzione costante e le proprietà 1) e 2) del risultato precedente, affermare che i polinomi sono funzioni continue su $\mathbb{R}$. Utilizzando poi anche la proprietà 3) si deduce che sono continue, dove sono definite, anche le funzioni razionali (cioè le funzioni rapporto di polinomi).

Teorema 5.1.3 (sulla continuità delle funzioni composte) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia f continua in x_o .*

Inoltre siano assegnati $Y \subseteq \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia $f(X) \subseteq Y$ e g continua in $f(x_o)$

Tesi: $g \circ f$ è continua in x_o .

Dim.

La tesi è vera se il punto x_o è isolato.

Sia x_o di accumulazione per X , in tal caso occorre dimostrare che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} g(f(x)) = g(f(x_o)).$$

Sia allora $W \in \mathcal{I}(g(f(x_o)))$ un intorno. Se $f(x_o)$ è isolato per Y sia $J_o \in \mathcal{I}(f(x_o))$ tale che $J_o \cap Y = \{f(x_o)\}$. Applicando ora la definizione di limite ad f in corrispondenza dell'intorno J_o si ha la tesi.

Se invece $f(x_o)$ è di accumulazione per Y la definizione di limite applicata prima alla funzione g e poi alla funzione f fornisce la tesi. $\diamond$

Daremo di seguito alcune proprietà delle funzioni continue.

Definizione 5.1.2 (insieme limitato) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$,*

$$(X \text{ si dice limitato}) \iff_{\text{def}} (\exists a > 0 \text{ tale che } X \subseteq [-a, a]).$$

Di facile verifica è il seguente risultato:

Teorema 5.1.4 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.*

$$(X \text{ è limitato}) \iff (\inf X \in \mathbb{R} \text{ e } \sup X \in \mathbb{R}).$$

Definizione 5.1.3 (punto interno ad un insieme) *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e sia $x_o \in A$.*

$$(x_o \text{ si dice interno ad } A) \iff_{\text{def}} (\exists a > 0 \text{ tale che }]x_o - a, x_o + a[\subseteq A.)$$

Indicheremo con A° l'insieme dei punti interni dell'insieme A

Definizione 5.1.4 (insieme aperto) *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$,*

$$(A \text{ si dice aperto}) \iff_{\text{def}} (A = A^\circ).$$

Un esempio di insieme aperto è un qualunque intervallo aperto $]a, b[$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $a < b$.

Definizione 5.1.5 (insieme chiuso) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$,

$$(X \text{ si dice chiuso}) \iff_{\text{def}} (\mathbb{R} \setminus X \text{ è aperto.})$$

Un esempio di insieme chiuso è un qualunque intervallo del tipo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $a < b$.

Teorema 5.1.5 (di WEIERSTRASS) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia:

1. X chiuso e limitato,
2. f continua su X ,

Tesi: $\exists x_1, x_2 \in X$ tale che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in X$.

Il punto x_1 si dice punto di minimo assoluto, mentre il punto x_2 si dice di massimo assoluto per f .

Per dimostrare il teorema di Weierstrass è opportuno considerare la nozione di sottosuccessione o successione estratta di una successione data ed un teorema che è attribuito alla coppia di matematici BOLZANO-WEIERSTRASS. Cominciamo dalla nozione di sottosuccessione.

Definizione 5.1.6 (di sottosuccessione) Sia $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione assegnata. Si chiama sottosuccessione, o successione estratta, della successione s la successione composta $s \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ottenuta componendo s con σ , dove $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una successione strettamente crescente.

Esempi di sottosuccessioni sono ottenuti componendo una successione assegnata $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ad esempio con la successione $\sigma(k) = k$. In tal caso si ottiene la relazione $s \circ \sigma = s$.

Considerando invece $\sigma(k) = 2k$ si ottiene la sottosuccessione degli elementi di s di indice pari.

Considerando poi $\sigma(k) = 2k - 1$ si ottiene la sottosuccessione degli elementi di s di posto dispari.

Utilizzeremo il seguente teorema che è il teorema del limite per le funzioni composte riscritto per le successioni.

Teorema 5.1.6 Sia $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione assegnata tale che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \ell$.

Sia $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una successione strettamente crescente

Tesi: $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} s(\sigma(k)) = \ell$.

Dim. Vedi la dimostrazione del limite per le funzioni composte. $\diamond$

Teorema 5.1.7 (di BOLZANO-WEIERSTRASS) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e chiuso e limitato. Sia anche $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione tale $s(\mathbb{N}) \subseteq X$.

Tesi: $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ successione strettamente crescente ed $\exists x_0 \in X$ tale che:

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} s(\sigma(k)) = x_0.$$

Dimostrazione del teorema di WEIERSTRASS.

Dimostriamo l'esistenza del punto di minimo. Proviamo cioè che

$$\exists x_1 \in X \text{ tale che } f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Dividiamo la dimostrazione in due parti: nella prima parte verifichiamo che f è limitata inferiormente, nella seconda parte proveremo l'esistenza del punto di minimo.

I) Verifichiamo che f è limitata inferiormente, cioè che

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ tale che } m \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Per assurdo f sia illimitata inferiormente, cioè supponiamo valida la seguente proprietà:

$$\forall m \in \mathbb{R} \exists x_m \in X \text{ tale che } m > f(x_m).$$

Prendendo m tale che $-m = n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X \text{ tale che } -n > f(x_n).$$

Utilizzando, ed esempio l'assioma della scelta i Zermelo, possiamo supporre che sia unico il punto x_n . È possibile allora considerare una successione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con $s(\mathbb{N}) \subseteq X$ tale che si abbia:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -n > f(s(n)).$$

Utilizzando ora il teorema di Bolzano-Weierstrass, si può affermare che: $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ successione strettamente crescente ed $\exists x_o \in X$ tale che:

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} s(\sigma(k)) = x_o.$$

Ne consegue che:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad -\sigma(k) > f(s(\sigma(k))).$$

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ si ottiene:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (-\sigma(k)) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} f(s(\sigma(k))).$$

Cioè:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s(\sigma(k))) = -\infty.$$

Inoltre poichè f è continua in x_o si ha:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s(\sigma(k))) = f(x_o).$$

Il teorema dell'unicità del limite dice che deve essere

$$f(x_o) = -\infty.$$

Essendo poi $f(x_o) \in \mathbb{R}$ si ha anche

$$f(x_o) > -\infty.$$

Pertanto dall'assurdo segue che f è limitata inferiormente.

Verifichiamo che esiste il punto di minimo.

Sia $\ell = \inf \{f(x) : x \in X\}$. Per le proprietà dell'estremo inferiore si può dire che valgono le seguenti relazioni:

- i) $\ell \leq f(x) \quad \forall x \in X$
- ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X \quad \text{tale che} \quad f(x_n) < \ell + \frac{1}{n}$

Come nel caso della prima parte della dimostrazione utilizzando l'assioma di Zermelo, si può supporre che per ogni n sia unico il punto x_n tale che si abbia $f(x_n) < \ell + \frac{1}{n}$.

Resta in tal caso definita una successione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con $s(\mathbb{N}) \subseteq X$ e tale che si abbia

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(s(n)) < \ell + \frac{1}{n}.$$

Utilizzando ora il teorema di Bolzano-Weierstrass, si può affermare che: $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ successione strettamente crescente ed $\exists x_o \in X$ tale che:

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} s(\sigma(k)) = x_o.$$

Ne consegue che:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f(s(\sigma(k))) < \ell + \frac{1}{\sigma(k)}.$$

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ si ottiene:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s(\sigma(k))) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\ell + \frac{1}{\sigma(k)} \right) = \ell.$$

Essendo anche $\ell \leq f(s(\sigma(k)))$ si ha:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s(\sigma(k))) = \ell.$$

Inoltre poichè f è continua in x_o si ha:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s(\sigma(k))) = f(x_o).$$

Ne segue allora che $f(x_o) = \ell$, cioè, per la proprietà i), risulta

$$f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Quindi x_o è un punto di minimo per f su X :

La dimostrazione dell'esistenza del punto di massimo è simile a quella considerata per il punto di minimo. $\diamond$

Il teorema che segue fornisce una risposta al problema della risolubilità di una equazione attraverso una condizione sufficiente.

Teorema 5.1.8 (degli zeri) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia:*

1. X intervallo,

2. f continua su X ,

3. $\exists x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ tale che $f(x_1)f(x_2) < 0$

Tesi: $\exists \bar{x} \in]x_1, x_2[$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Dim.

Supponiamo che sia $f(x_1) > 0$, di conseguenza risulta $f(x_2) < 0$. Per verificare la tesi consideriamo il seguente insieme di ascisse:

$$E = \{x \in X : f(t) > 0 \quad \forall t \in [x_1, x]\}.$$

Si noti che $x_1 \notin E$; inoltre l'insieme E verifica le seguenti proprietà:

1) $E \neq \emptyset$

2) $\forall x \in E$ si ha: $x \leq x_2$

Per verificare la prima proprietà basta applicare il teorema della permanenza del segno alla disuguaglianza $f(x_1) > 0$. Esiste allora $\delta_o > 0$ tale che

$$\forall x \in (]x_1 - \delta_o, x_1 + \delta_o[\cap X) \quad \text{si ha: } f(x) > 0.$$

Ovviamente si ha anche $x_1 + \delta_o < x_2$.

Per provare questo si osservi intanto che risulta $x_1 + \delta_o \leq x_2$; se infatti fosse $x_1 + \delta_o > x_2$ si potrebbe dire che è anche $f(x_2) > 0$.

Inoltre, sempre per il teorema della permanenza del segno, si ha anche $f(x_1 + \delta_o) \geq 0$. Essendo anche $f(x_2) < 0$, risulta $x_1 + \delta_o \neq x_2$. Quindi è provato che risulta $x_1 + \delta_o < x_2$.

Da quanto appena detto segue che $x_1 + \delta_o < x_2 \in E$, cioè risulta: $E \neq \emptyset$.

Per verificare la proprietà 2) si può ragionare per assurdo, e si può supporre che $\exists x_o \in E$ tale che si abbia: $x_o > x_2$. In tal caso si ha subito una contraddizione perchè risulta anche, per definizione di E , $f(x_2) > 0$. Pertanto la 2) è vera.

Essendo allora E non vuoto e limitato superiormente, posto $\bar{x} = \sup E$, si ha evidentemente $x_1 < x_1 + \delta_o \leq \bar{x} \leq x_2$. Inoltre per le proprietà dell'estremo superiore si ha anche $f(\bar{x}) \geq 0$, quindi è anche $\bar{x} < x_2$.

Resta da provare che si ha $f(\bar{x}) = 0$. Se fosse $f(\bar{x}) > 0$, sempre per il teorema della permanenza del segno esisterebbe $\eta_o > 0$ tale che

$$\forall x \in (]\bar{x} - \eta_o, \bar{x} + \eta_o[\cap X) \quad \text{si ha: } f(x) > 0.$$

Questo è in contrasto con il fatto che $\bar{x} = \sup E$. $\diamond$

Va osservato che esistono altri modi per dimostrare il teorema degli zeri. Nel modo con cui è stato qui dimostrato il punto $\bar{x}$ è tale che si abbia anche $f(t) > 0 \quad \forall t \in [x_1, \bar{x}]$.

Ovviamente il punto $\bar{x}$ in cui f si annulla è unico su X se la stessa f , oltre a verificare le ipotesi del teorema degli zeri, risulta anche strettamente monotona su X .

Teorema 5.1.9 (dei valori intermedi di BOLZANO) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia:

1. X intervallo,

2. f continua su X ,

Tesi: L'immagine $f(X)$ di f è un intervallo.

Dim. Per dimostrare il teorema faremo uso del teorema degli zeri. Per verificare che l'immagine $f(X)$ è un intervallo è sufficiente dimostrare che, considerati $y_1, y_2 \in f(X)$ con $y_1 < y_2$ allora si ha anche $[y_1, y_2] \subseteq f(X)$.

Per verificare l'inclusione si consideri $y_o \in [y_1, y_2]$ occorre verificare che $y_o \in f(X)$.

Se si ha $y_o = y_1$ oppure $y_o = y_2$ la tesi è vera. Sia allora $y_o \in]y_1, y_2[$; in tal caso considero intanto $x_1 \in X$ ed $x_2 \in X$ tale che si abbia $y_1 = f(x_1)$ ed $y_2 = f(x_2)$.

A questo punto applico il teorema degli zeri alla funzione

$$g : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita dalla relazione} \quad g(x) = f(x) - y_o \quad \forall x \in X.$$

La funzione g verifica le ipotesi del teorema degli zeri, infatti X è intervallo e g è continua su X e si ha anche $g(x_1)g(x_2) < 0$. Quindi esiste $x_o \in [x_1, x_2]$, se risulta $x_1 < x_2$, oppure esiste $x_o \in [x_2, x_1]$, se risulta $x_2 < x_1$, tale che $g(x_o) = 0$.

Cioè $f(x_o) = y_o$, da cui si deduce che $y_o \in f(X)$. $\diamond$

Il teorema di Bolzano può essere utilizzato in molti modi. Un modo che sicuramente risulta molto utile è quello di poter dire in alcuni casi quando, assegnata una funzione reale definita continua su un intervallo X ed assegnato $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x_o \in X$.

Una risposta che si può dare consiste nel dire che considerati $\alpha = \inf f(X)$ e $\beta = \sup f(X)$, se $y \in]\alpha, \beta[$ l'equazione ha almeno una soluzione, se invece $y \notin [\alpha, \beta]$ allora l'equazione non ha soluzione. Nulla si può dire, in generale, se si ha $y = \alpha$ oppure $y = \beta$.

Il ragionamento fatto non ha sicuramente problemi se si ha $-\infty < \alpha$ e $\beta < +\infty$. Se ad esempio fosse $-\infty = \alpha$ oppure $\beta = +\infty$ il ragionamento fatto prima deve essere opportunamente modificato. Lascio al lettore queste modifiche.

Teorema 5.1.10 (inverso di BOLZANO) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia:*

1. X intervallo,
2. $f(X)$ intervallo
3. f strettamente monotona su X

Tesi: f è continua su X .

Dim. Sia f strettamente crescente. Per avere la tesi faremo un ragionamento per assurdo.

Supponiamo che f non sia continua su X , quindi esiste $x_o \in X$ in cui f non è continua. Siccome poi f è strettamente crescente si ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) \leq f(x_o) \leq \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) \quad \text{e si ha:} \quad \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) \leq f(x_o) \leq \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x).$$

Poichè f non risulta continua in $x_o \in X$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) < f(x_o) \quad \text{oppure} \quad f(x_o) < \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x).$$

Se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0)$$

si consideri $\bar{y}$ con

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \bar{y} < f(x_0).$$

Poichè $f(X)$ è intervallo si ha $\bar{y} \in f(X)$, quindi esiste $\bar{x} \in X$ tale che sia $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Ovviamente si ha: $\bar{x} \neq x_0$. Inoltre se si ha $\bar{x} < x_0$ risulta anche, per la definizione di limite, $f(\bar{x}) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Si deduce allora che $\bar{y} = f(\bar{x}) < \bar{y}$ che risulta ovviamente assurdo.

Analogo ragionamento si può ripetere se risulta

$$f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x). \quad \diamond$$

Teorema 5.1.11 (continuità della funzione inversa) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia:*

1. X intervallo,
2. $f(X)$ intervallo
3. f strettamente monotona su X

Tesi: $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ è continua su $f(X)$.

Dim. Preliminarmente occorre osservare che la funzione f risulta iniettiva perchè è strettamente monotona. Inoltre la funzione f^{-1} della tesi, in generale, non risulta l'inversa della funzione f ; in realtà essa risulta la funzione inversa della funzione ridotta di f ad $f(X)$.

Se poi risulta anche $f(X) = \mathbb{R}$ allora f è anche suriettiva, quindi è anche invertibile. In tal caso la funzione f^{-1} della tesi è la funzione inversa di f .

La dimostrazione si ottiene facilmente osservando che f^{-1} è strettamente monotona dello stesso tipo di f . Quindi siccome ad f^{-1} si può applicare il teorema inverso di Bolzano ottenendo la sua continuità. $\diamond$

Il risultato di continuità della funzione inversa consente di dimostrare che le seguenti funzioni sono continue.

1. Assegnato $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione radice-ennesima.

Sia n dispari, la funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è definita ed ha valori in $\mathbb{R}$ ed è ottenuta per operazione di inversione della potenza di esponente n dispari. Tale funzione potenza è definita, continua ed invertibile da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$. Quindi per il teorema di continuità della funzione inversa si deduce che $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è continua su $\mathbb{R}$.

Sia n pari. In tal caso la funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$, per motivazioni analoghe al caso precedente è definita, ha valori ed è continua sull'insieme dei numeri reali non negativi: $[0, +\infty[$.

2. Dalla funzione $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è possibile definire la funzione $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ che risulta strettamente crescente e suriettiva. Per il teorema di continuità della funzione inversa si deduce che è continua anche la funzione $\arcsin$.

3. Dalla funzione $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è possibile definire la funzione $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [\pi, 0]$ che risulta strettamente decrescente e suriettiva. Per il teorema di continuità della funzione inversa si deduce che è continua anche la funzione $\arccos$.
4. Dalla funzione $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ è possibile definire la funzione $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ che risulta strettamente crescente e suriettiva. Per il teorema di continuità della funzione inversa si deduce che è continua anche la funzione $\arctan$.

5.2 Funzioni uniformemente continue

È utile considerare anche la seguente nozione di funzione uniformemente continua che sarà utilizzata, ad esempio, nella teoria dell'integrazione.

Definizione 5.2.1 (funzione uniformemente continua) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ è uniformemente} \\ \text{continua su } X \end{array} \right. \iff_{def} \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x_1, x_2 \in X \\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Vale il seguente risultato:

Teorema 5.2.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sia f uniformemente continua su X
Tesi:
 f è continua su X .

Dimostrazione: Sia $x_o \in X$, se è isolato la continuità di f è data.

Sia $x_o \in X \cap D(X)$, per verificare che f è continua sia assegnato $J \in \mathcal{I}(f(x_o))$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che si abbia $]f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon[\subseteq J$.

Poichè f è uniformemente continua esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in X$ si ha $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

◇

Va notato che non è vero che una funzione continua è anche uniformemente continua. Infatti non è uniformemente continua la funzione

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Si consideri per questo $x_n = \frac{1}{n}$ ed $y_n = \frac{1}{n+1}$. Evidentemente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)}$$

ed

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1.$$

È possibile dimostrare però il seguente risultato:

Teorema 5.2.2 (di HEINE-CANTOR) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia:*

1. X chiuso e limitato,
2. f continua su X ,

Tesi: f è uniformemente continua su X .

Dimostrazione: Proviamo il teorema per assurdo.

Per questo sia $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che $\forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in X$ per cui si ha $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ ed $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \bar{\varepsilon}$.

Considero ora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in X$ tale che si abbia $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ed $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \bar{\varepsilon}$.

Utilizzando ora l'assioma della scelta di Zermelo si può supporre che $\forall n \in \mathbb{N}$ i punti $x_n, y_n \in X$ siano univocamente individuati.

Possiamo ora applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass alla successione $(x_n)_n$. Esistono allora $\bar{x} \in X$ ed una successione $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che la sottosuccessione $(x_{\sigma(k)})_k$ di $(x_n)_n$ abbia come limite il punto $\bar{x}$.

Anche la sottosuccessione $(y_{\sigma(k)})_k$ di $(y_n)_n$ ha come limite il punto $\bar{x}$.
Infatti si ha:

$$|y_{\sigma(k)} - \bar{x}| \leq |y_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)}| + |x_{\sigma(k)} - \bar{x}| \leq \frac{1}{\sigma(k)} + |x_{\sigma(k)} - \bar{x}|.$$

Vale evidentemente anche la relazione $|f(x_{\sigma(k)}) - f(y_{\sigma(k)})| \geq \bar{\varepsilon}$.

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$, poichè f è continua in $\bar{x}$, si ha

$$0 = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x_{\sigma(k)}) - f(y_{\sigma(k)})| \geq \bar{\varepsilon} > 0. \diamond$$

È utile considerare alcune altre condizioni sufficienti per ottenere l'uniforme continuità di una funzione f . Tali condizioni non fanno riferimento alla natura dell'insieme X su cui essa è definita. Per questo ricordiamo la definizione seguente:

Definizione 5.2.2 (funzione lipschitziana) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ si dice di Lipschitz} \\ (o \text{ lipschitziana}) \text{ su } X \end{array} \right. \iff_{def} \left\{ \begin{array}{l} \exists k \geq 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in X \\ |f(x_2) - f(x_1)| \leq k |x_2 - x_1|. \end{array} \right.$$

Diamo anche la seguente definizione.

Definizione 5.2.3 (funzione holderiana) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $\alpha \in [0, 1]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ si dice di Holder (o holderiana)} \\ \text{di esponente } \alpha \text{ su } X \end{array} \right\} \Longleftrightarrow_{def} \left\{ \begin{array}{l} \exists k \geq 0 : \quad \forall x_1, x_2 \in X \\ |f(x_2) - f(x_1)| \leq k |x_2 - x_1|^\alpha. \end{array} \right.$$

Ovviamente se una funzione è lipschitziana allora è anche holderiana. Naturalmente non vale il viceversa. Si consideri infatti, assegnato $\alpha \in]0, 1[$, la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita dalla relazione } f(x) = |x|^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Essa non è lipschitziana perchè si ha:

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} : x > 0 \right\} &= \sup \left\{ \frac{x^\alpha}{x} : x > 0 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{x^{1-\alpha}} : x > 0 \right\} = +\infty. \end{aligned}$$

Risulta invece holderiana di esponente α essendo:

$$||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Per una funzione holderiana si ha la seguente proprietà.

Teorema 5.2.3 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ holderiana di esponente $\alpha \in]0, 1]$.

Tesi: f è uniformemente continua su X .

Dimostrazione. Poichè f è holderiana di esponente $\alpha \in]0, 1]$ esiste

$$k \geq 0 : |f(x_2) - f(x_1)| \leq k |x_2 - x_1|^\alpha \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Considerando allora $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ e si ha la tesi. $\diamond$

CAPITOLO 6

LA DERIVATA

6.1 Derivate: definizione, proprietà e significato geometrico.

Considereremo in questo paragrafo la nozione di derivata di una funzione reale di una variabile reale definita su un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$. Tale nozione sarà esaminata esclusivamente nei punti $x_o \in X$ che sono anche interni ad X (vedi la relativa definizione). Indicheremo con X° l'insieme dei punti interni di X . Per dire che x_o è un punto interno di X scriveremo $x_o \in X^\circ$.

Definizione 6.1.1 (La funzione rapporto incrementale.) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. La seguente funzione*

$$F : X \setminus \{x_o\} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \forall x \in X \setminus \{x_o\}.$$

prende il nome di funzione rapporto incrementale di f di punto iniziale x_o .

Osserviamo che x_o , essendo interno ad X , è anche di accumulazione per $X \setminus \{x_o\}$, cioè $x_o \in \mathcal{D}(X \setminus \{x_o\})$. Ha senso allora la seguente definizione:

Definizione 6.1.2 (Derivata)

$$(f \text{ è derivabile in } x_o) \iff_{def} \left(\exists \lim_{x \rightarrow x_o} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R} \right).$$

Quando f è derivabile in x_o porremo, per definizione,

$$f'(x_o) =_{def} \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o},$$

il numero reale $f'(x_o)$ prende il nome di derivata prima di f in x_o .

Nel seguito quando diremo che $\exists f'(x_o)$ vorremo intendere che esiste la derivata della funzione f in x_o e che $f'(x_o)$ è il limite finito del rapporto incrementale di f in x_o .

Un altro modo, ovviamente equivalente al primo, di rappresentare il rapporto incrementale è il seguente.

Per ogni $x \in X \setminus \{x_o\}$ possiamo porre $h = x - x_o$, conseguentemente è $h \neq 0$, e quindi risulta $x = x_o + h$.

È possibile allora considerare l'insieme $E = \{h \in \mathbb{R} : x_o + h \in X\}$, è ovvio che risulta

$$x_o \in X^\circ \iff 0 \in E^\circ$$

e inoltre, essendo $0 \in E^\circ$, si ha conseguentemente $0 \in \mathcal{D}(E \setminus \{0\})$.

A questo punto possiamo considerare la funzione

$$G : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad G(h) = \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Anche la funzione G si denoterà come la funzione rapporto incrementale di f in $x_\circ$.
È possibile verificare in modo molto semplice che:

Teorema 6.1.1

$$f \text{ è derivabile in } x_\circ \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} G(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \in \mathbb{R}$$

e si ha, ovviamente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = f'(x_\circ).$$

Possiamo considerare ora il sottoinsieme Y di X definito nel modo seguente $Y = \{x \in X^\circ : \exists f'(x)\}$. Se risulta $Y \neq \emptyset$ allora in esso è definita in modo naturale la funzione derivata prima di f che sarà indicata indifferentemente nei seguenti modi

$$Df = f' : Y \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{essendo} \quad \forall x \in Y, \quad Df(x) =_{def} f'(x) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Naturalmente $f' = Df$ è una funzione ben definita per il teorema di unicità del limite.

Se risulta $Y = \emptyset$ allora vuol dire che non esistono punti x in cui f è derivabile. Brevemente allora si dirà che f non è derivabile su X . Saranno molto frequenti nel seguito gli esempi in cui si avrà $Y = X^\circ$.

È opportuno osservare che in $x_\circ$ si possono considerare anche il limite sinistro o il limite destro del rapporto incrementale di f relativo al punto $x_\circ$ ottenendo le seguenti definizioni.

Definizione 6.1.3 (Derivata sinistra)

$$(f \text{ è derivabile da sinistra in } x_\circ) \iff_{def} \left(\lim_{x \rightarrow x_\circ^-} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \in \mathbb{R} \right).$$

Se f è derivabile da sinistra in $x_\circ$ si pone di solito

$$\lim_{x \rightarrow x_\circ^-} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = f'_-(x_\circ).$$

Quindi scrivendo $\exists f'_-(x_\circ)$ significa che la funzione f ammette in $x_\circ$ derivata da sinistra.

Inoltre

Definizione 6.1.4 (Derivata destra)

$$(f \text{ è derivabile da destra in } x_o) \iff_{\text{def}} \lim_{x \rightarrow x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}.$$

Se f è derivabile a destra in x_o si pone di solito

$$\lim_{x \rightarrow x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'_+(x_o).$$

Anche in questo caso la scrittura $\exists f'_+(x_o)$ significa che la funzione f ammette in x_o derivata da destra.

Le definizioni precedenti, che permettono di definire le derivate "unilaterali", consentono anche di derogare, in alcuni casi speciali che considereremo ora, alla richiesta che x_o sia interno ad X .

Alcuni casi in cui capiterà di considerare la definizione di derivata laterale sono dati ad esempio dai seguenti intervalli $X = [a, b]$, $X = [a, b[$, $X =]a, b]$, $X = [a, +\infty[$, $X =]-\infty, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

In tal caso ha senso considerare, se esiste, la derivata destra in a , se $a \in X$, oppure la derivata sinistra in b se $b \in X$. È possibile inoltre legare tra loro le definizioni precedenti mediante il seguente risultato:

Teorema 6.1.2 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ allora:

$$(\exists f'(x_o)) \iff (\exists f'_-(x_o), \exists f'_+(x_o) \text{ e si ha } f'_-(x_o) = f'_+(x_o)).$$

Dimostrazione. Basta tenere presente il teorema di esistenza del limite di una funzione se e solo se esistono il limite sinistro ed il destro e coincidono ed applicarlo alla funzione rapporto incrementale $x \in X \setminus \{x_o\} \rightarrow \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Evidentemente può succedere che f sia derivabile da sinistra e da destra in x_o ma non essere derivabile in x_o . È il caso in cui si ha $f'_-(x_o) \neq f'_+(x_o)$.

A tale scopo si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

È facile vedere che $\nexists f'(0)$ perché si ha $\exists f'_-(0) = -1$ ed $\exists f'_+(0) = 1$.

È infine possibile legare la derivabilità alla continuità di una funzione nel modo seguente.

Teorema 6.1.3 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $\exists f'_-(x_o)$ ed $\exists f'_+(x_o)$.

Tesi: f è continua in x_o .

Dimostrazione. Per avere la tesi occorre far vedere che $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$.

e ovviamente è necessario e sufficiente dimostrare che:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = f(x_o) \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = f(x_o)$$

Infatti risulta

$$f(x) = f(x) - f(x_o) + f(x_o) = f(x_o) + \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}(x - x_o) \quad \forall x \in X \setminus \{x_o\}.$$

Utilizzando l'ipotesi di esistenza della derivata sinistra e le operazioni sui limiti si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = \\ f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) &= f(x_0) + f'_-(x_0) \cdot 0 = f(x_0).\end{aligned}$$

Allo stesso modo si prova che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. $\diamond$

Non vale il viceversa del precedente risultato. Si può infatti vedere facilmente che esistono funzioni continue in un punto ma che in tale punto non sono derivabili nè a sinistra nè a destra. Si consideri infatti la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

È facile vedere f è continua in $x = 0$.

Infatti, risultando $0 \leq |f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ed utilizzando il teorema del confronto sui limiti si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Inoltre f non è derivabile in $x = 0$ perchè la relativa funzione rapporto incrementale in tale punto è data dalla relazione

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

che evidentemente non ha limite nè per $x \rightarrow 0^-$ e nè per $x \rightarrow 0^+$. Quindi non esiste nè la derivata sinistra e nè la derivata destra di f in $x = 0$.

Traendo spunto dall'esempio appena considerato si può controllare agevolmente che le seguenti funzioni g_1 e g_2 definite in $\mathbb{R}$ rispettivamente dalle seguenti relazioni

$$g_1(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

e

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sono entrambe continue in $x = 0$. Invece, sempre nello stesso punto, la funzione g_1 è derivabile da sinistra e non è derivabile da destra e la funzione g_2 è derivabile da destra e non da sinistra.

Osservazione 6.1.1 *La nozione di derivata presenta lo studio di un limite in cui non è applicabile il teorema sul rapporto sui limiti.*

Infatti in tal caso, se la funzione data è continua, siamo in presenza della forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

Considerata infatti una funzione f derivabile ad esempio a sinistra in un punto x_0 si è già visto che è anche continua a sinistra e quindi risulta $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x) - f(x_0)] = 0$. Inoltre è anche $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} [x - x_0] = 0$.

Pertanto la funzione rapporto incrementale di f in x_0 :

$$x \in X \setminus \{x_0\} \longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

nel caso si dovesse studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e si volesse fare ricorso alla regola sul rapporto presenta la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Peraltro tale limite esiste ed è finito per l'ipotesi di derivabilità fatta su f .

Teorema 6.1.4 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X^\circ$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, si ha:*

1. $\exists m \geq 0$ ed $\exists I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $\forall x \in X \cap I \cap]-\infty, x_0[\quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq m \implies f$ è continua a sinistra in x_0 , cioè $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
2. $\exists m \geq 0$ ed $\exists I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $\forall x \in X \cap I \cap]x_0, +\infty[\quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq m \implies f$ è continua a destra in x_0 , cioè $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
3. $\exists m \geq 0$ ed $\exists I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $\forall x \in X \cap I \setminus \{x_0\} \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq m \implies f$ è continua in x_0 , cioè $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dimostrazione.

1) Per avere la tesi basta osservare che, essendo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \quad \forall x \in X \setminus \{x_0\},$$

dalla ipotesi di limitatezza sulla funzione rapporto incrementale segue $\exists m \geq 0$ ed $\exists I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che

$$\forall x \in X \cap I \cap]-\infty, x_0[: \quad |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| |x - x_0| \leq m |x - x_0|.$$

Utilizzando allora il teorema del confronto per i limiti si ha la tesi.

2) La dimostrazione è simile ad 1).

La verifica di 3) è conseguenza di 1) e di 2). $\diamond$

Osservazione 6.1.2 *Ci sono funzioni che sono continue in un punto assegnato x_0 ma la relativa funzione rapporto incrementale in x_0 non è limitata in un intorno di x_0 .*

Si consideri infatti la famiglia di funzioni $f(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha \in]0, +\infty[$.

Allora se è $0 < \alpha < 1$ la funzione f è continua in $x = 0$ ma la funzione rapporto incrementale in $x = 0$, essendo data dalla relazione

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|^\alpha}{x},$$

risulta illimitata sia superiormente e sia inferiormente in ogni intorno di $x = 0$.

Risulta infatti $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|^\alpha}{x} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|^\alpha}{x} = +\infty$. Infine, se è $\alpha > 1$, esiste $f'(0) = 0$.

6.2 Regole di derivazione e derivate delle funzioni elementari.

Studieremo in questo paragrafo il legame esistente tra la nozione di derivata di una funzione in un punto ed alcune operazioni tra funzioni come quelle di somma, prodotto, rapporto, composizione e inversione.

Teorema 6.2.1 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X^\circ$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che $\exists f'(x_0)$ ed $\exists g'(x_0)$. Allora*

1. $\exists (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $\exists (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Se è $g(x_0) \neq 0$ allora $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Dimostrazione.

1) La funzione rapporto incrementale di $f + g$ in x_0 si può scrivere, $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $x_0 + h \in X$, nel modo seguente:

$$\frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

Allora poichè i due addendi

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

quando $h \rightarrow 0$ hanno limite finito pari ad

$$f'(x_0) \quad \text{ed a} \quad g'(x_0),$$

il teorema sul limite della somma fornisce la tesi.

2) Sia assegnato $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $x_0 + h \in X$, risulta:

$$\frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_o + h)g(x_o + h) - f(x_o)g(x_o + h) + f(x_o)g(x_o + h) - f(x_o)g(x_o)}{h} =$$

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}g(x_o + h) + f(x_o)\frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h}.$$

Tenendo ora presente le ipotesi da cui si ricava che

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o) \in \mathbb{R} \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h} = g'(x_o) \in \mathbb{R}$$

e che la funzione g è continua in x_o , cioè $\exists \lim_{h \rightarrow 0} g(x_o + h) = g(x_o)$.

Applicando pertanto il teorema sul prodotto e sulla somma per i limiti si ha la tesi, cioè si ha:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h)g(x_o + h) - f(x_o)g(x_o)}{h} = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o).$$

3) Sia assegnato $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $x_o + h \in X$, e tale che: $g(x_o + h) \neq 0$. Questo è possibile perchè, essendo per ipotesi $\exists \lim_{h \rightarrow 0} g(x_o + h) = g(x_o) \neq 0$, si può applicare il teorema della permanenza del segno dal quale si ricava che $\exists I \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $\forall x \in I \cap X$ si ha $g(x)g(x_o) > 0$, cioè $g(x)$ ha lo stesso segno di $g(x_o)$.

Considero allora $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x_o + h \in I \cap X$.

Per tali h il rapporto incrementale della funzione $\frac{f}{g}$ si scrive nel modo seguente:

$$\frac{\frac{f(x_o + h)}{g(x_o + h)} - \frac{f(x_o)}{g(x_o)}}{h} = \frac{f(x_o + h)g(x_o) - f(x_o)g(x_o + h)}{hg(x_o + h)g(x_o)} =$$

$$= \frac{f(x_o + h)g(x_o) - f(x_o)g(x_o) + f(x_o)g(x_o) - f(x_o)g(x_o + h)}{hg(x_o + h)g(x_o)} =$$

$$= \frac{\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}g(x_o) - f(x_o)\frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h}}{g(x_o + h)g(x_o)}.$$

A questo punto tenendo conto delle ipotesi si ha:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o) \in \mathbb{R} \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h} = g'(x_o) \in \mathbb{R}$$

e che la funzione g è continua in x_o , cioè $\exists \lim_{h \rightarrow 0} g(x_o + h) = g(x_o)$.

Applicando allora le regole sulle operazioni sui limiti si ha la tesi; cioè:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \diamond$$

Mediante il calcolo della derivata delle funzioni elementari e facendo uso del precedente risultato e di altri successivi si può determinare la derivata di molte funzioni.

Consideriamo alcuni semplici ma importanti esempi.

Esempio 6.2.1 (Funzione costante) Sia $k \in \mathbb{R}$ e la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Risulta $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Il grafico di f è dato da una retta parallela all'asse delle ascisse e passante per il punto di coordinate $(0, k)$.

Si vede facilmente che $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ risulta

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$$

quindi, essendo il rapporto incrementale identicamente uguale a 0, anche il limite per $h \rightarrow 0$ è ancora uguale ad 0. In tal caso risulta

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cioè la derivata della funzione costante è nulla. $\diamond$

Esempio 6.2.2 (Funzione identità di $\mathbb{R}$.) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Risulta $f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Il grafico di f è dato da una retta passante per l'origine degli assi cartesiani ed avente coefficiente angolare 1.

In questo caso si può verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$ è

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

quindi, essendo la funzione rapporto incrementale costantemente uguale ad 1, anche il limite per $h \rightarrow 0$ è ancora uguale ad 1. In tal caso risulta

$$f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \diamond$$

Esempio 6.2.3 (Funzione polinomio di primo grado) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = mx + q \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Risulta $f'(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La funzione rapporto incrementale in $x \in \mathbb{R}$ è costantemente uguale ad $m \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = m \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists f'(x) = m.$$

Cioè la derivata coincide con il coefficiente angolare m della retta. $\diamond$

Esempio 6.2.4 (Funzione potenza con esponente n intero positivo) Sia assegnato $n \in \mathbb{N}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 Risulta $f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Il rapporto incrementale é:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Utilizzando le regole di scomposizione dell'algebra elementare il rapporto si scrive nella forma:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h-x) \sum_{j=1}^n (x+h)^{n-j} x^{j-1}}{h} = \sum_{j=1}^n (x+h)^{n-j} x^{j-1} \quad \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Considerando ora il limite per $h \rightarrow 0$ si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (x+h)^{n-j} x^{j-1} = \sum_{j=1}^n x^{n-j} x^{j-1} = \sum_{j=1}^n x^{n-1} = nx^{n-1}. \diamond$$

Il risultato appena dimostrato si può ottenere anche utilizzando il principio di induzione su $n \in \mathbb{N}$.

La verifica si sviluppa in due parti: la prima parte consiste nel verificare che la tesi é vera per $n = 1$; la seconda nel supporre vera la tesi per un assegnato numero naturale n e nel dimostrare che é ancora vera per il numero naturale $n + 1$.

Infatti per $n = 1$ si ha $f(x) = x$ e quindi risulta $f'(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Inoltre, supposta vera la formula per un assegnato $n \in \mathbb{N}$, verifichiamo che é vera per $n + 1$.

Si consideri quindi $f(x) = x^{n+1} \forall x \in \mathbb{R}$.

Utilizzando la moltiplicazione si ha $f(x) = x \cdot x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dalla regola di derivazione del prodotto si ottiene:

$$f'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}. \diamond$$

Esempio 6.2.5 (Funzione potenza con esponente n intero negativo) Sia assegnato $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$ e sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Risulta $f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Assegnato $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$, si può la funzione si può scrivere nella forma $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Utilizzando la regola di derivazione sul rapporto si ottiene la tesi:

$$f'(x) = \frac{0x^{-n} - 1(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \diamond$$

Utilizzando i risultati degli esempi precedenti ed il teorema sulle regole di derivazione si possono derivare le funzioni polinomio e le funzioni razionali.

Esempio 6.2.6 (Funzione esponenziale) Assegnato $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Risulta $f'(x) = a^x \log a \quad \forall x \in \mathbb{R}$, dove $\log a$ ha come base il numero e di Nepero, che spesso non si indica.

Fissato $x \in \mathbb{R}$ ed $h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$ la funzione rapporto incrementale di f in x è data da

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a. \diamond$$

Se risulta $a = e$ si ha la funzione $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Per essa si ha, ovviamente, $f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Si nota quindi che l'operazione di derivazione lascia inalterata la funzione $f(x) = e^x$.

Esempio 6.2.7 (Funzione logaritmo) Assegnato $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Risulta $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e \quad \forall x \in]0, +\infty[$, essendo e il numero di Nepero.

Per avere il risultato siano $x \in]0, +\infty[$ ed $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ tale che $x+h \in]0, +\infty[$.

Si ha:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x}$$

$$\frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.$$

Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e. \diamond$$

Quindi se risulta $a = e$ si ha $\log_e e = 1$ e quindi: $f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Esempio 6.2.8 (Funzioni trigonometriche elementari) Risulta:

- a) $D \sin x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- b) $D \cos x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- c) $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$,
- d) $D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Verifico la a). Fisso $x \in \mathbb{R}$ e considero $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ e la funzione rapporto incrementale di punto iniziale x , che, facendo uso delle formule di prostaferesi, si può trasformare nel modo seguente:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{(x+h)-x}{2} \cos \frac{(x+h)+x}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$, tenendo conto che la funzione $\cos x$ è continua, per cui risulta $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x$, e che risulta $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$, si ha la tesi.

Cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

La verifica di b) è simile alla a). Si può infatti utilizzare la formula di prostaferesi di $\cos x$ per scrivere il rapporto incrementale di punto iniziale x ed incremento $h \neq 0$ nel modo seguente:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2 \frac{\sin(x+h)-x}{2} \frac{\sin(x+h)+x}{2}}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin(x + \frac{h}{2}).$$

Tenendo allora presente il limite notevole $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ e la continuità della funzione $\sin x$ da cui segue che $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{h}{2}) = \sin x$, si ricava la tesi; cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x.$$

Per verificare la c) basta utilizzare la regola di derivazione del rapporto tenendo presente che valgono a) e b) e che risulta $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, infatti è:

$$D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La verifica di d) è simile a c) se si tiene conto che risulta $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, si ha:

$$D \cot x = D \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \diamond$$

Teorema 6.2.2 (Derivata di una funzione composta) 1. Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exists f'(x_0)$. Sia poi $y_0 = f(x_0)$.

2. Siano $Y \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f(X) \subseteq Y$ e con $y_0 \in Y^\circ$.

3. Sia $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\exists g'(y_0)$.
Tesi: $\exists (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Dimostrazione: Dall'ipotesi di derivabilità di f in x_0 segue che $\forall h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in X$ $\exists \omega(x_0, h) \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \omega(x_0, h)h \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \omega(x_0, h) = 0.$$

Inoltre poichè $\exists g'(y_0)$ si ha: $\forall k \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 + k \in Y$ $\exists \psi(y_0, k) \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + g'(y_0)k + \psi(y_0, k)k \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \psi(y_0, k) = 0.$$

Se ora pongo $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$, ricordando che $y_0 = f(x_0)$, si ha,

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x_0+h) - f(x_0)) + \psi(f(x_0), f(x_0+h) - f(x_0))(f(x_0+h) - f(x_0)) =$$

$$g(f(x_o)) + g'(f(x_o))f'(x_o)h + g'(f(x_o))\omega(x_o, h) + \psi(f(x_o), f(x_o + h) - f(x_o))(f'(x_o)h + \omega(x_o, h)h) =$$

$$g(f(x_o)) + g'(f(x_o))f'(x_o)h + h[g'(f(x_o))\omega(x_o, h) + \psi(f(x_o), f(x_o + h) - f(x_o))(f'(x_o) + \omega(x_o, h))].$$

Facendo vedere che il termine in parentesi quadre è infinitesimo per $h \rightarrow 0$ si ha la tesi. Il risultato è vero perchè, essendo f derivabile in x_o è anche continua in tale punto e quindi risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_o + h) - f(x_o)] = 0,$$

quindi è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi(f(x_o), f(x_o + h) - f(x_o)) = 0.$$

Inoltre è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(x_o, h) = 0$$

perchè f è derivabile.

Ne segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_o + h)) - g(f(x_o))}{h} = g'(f(x_o))f'(x_o). \diamond$$

Esempio 6.2.9 La funzione $f(x) = \log_a |x|$ risulta definita sull'insieme $X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ed è ivi derivabile. Si ha:

$$\forall x \in X \quad \exists D(\log_a |x|) = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Infatti per $x > 0$ la tesi è ovvia. Invece se risulta $x < 0$ si ha $\log_a |x| = \log_a (-x)$, quindi utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$\forall x < 0 \quad D \log_a |x| = D \log_a (-x) = \frac{1}{-x} \log_a e (-1) = \frac{1}{x} \log_a e. \diamond$$

Esempio 6.2.10 (Funzione potenza ad esponente reale) Assegnato $a \in \mathbb{R}$ sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^a \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

Risulta $f'(x) = ax^{a-1} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

Per avere la tesi si noti che si ha:

$$f(x) = x^a = e^{a \log x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Utilizzando gli esempi precedenti ed il teorema di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$f'(x) = e^{a \log x} a \frac{1}{x} = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1} \diamond$$

Teorema 6.2.3 (Derivata della funzione inversa.) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e poniamo $y_o = f(x_o)$.

Supponiamo inoltre che:

1. X è intervallo;
2. f è continua su X ;
3. f è iniettiva su X ;
4. $\exists f'(x_0) \neq 0$.

Tesi: $\exists f^{-1} : f(X) \Rightarrow X$ inversa (della ridotta ad $f(X)$) di f ed $\exists (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Dimostrazione: Osserviamo anzitutto che $f(X)$ è un intervallo perchè f è una funzione continua ed X è un intervallo, per il teorema dei valori intermedi. Inoltre la funzione $f : X \rightarrow f(X)$, ridotta di f ad $f(X)$, è invertibile perchè risulta bigettiva.

Sia $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ la sua inversa.

Ancora: y_0 è interno ad Y perchè x_0 è interno ad X e perchè f , essendo iniettiva e continua, risulta essere strettamente monotona su X .

Infine per provare che f^{-1} è derivabile in y_0 considero $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ tale $y_0 + k \in f(X)$.

Pongo $h = f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)$, quindi è $h \neq 0$ perchè f^{-1} è ancora strettamente monotona dello stesso carattere di f .

Inoltre si ha $f^{-1}(y_0 + k) = f^{-1}(y_0) + h = x_0 + h$ e quindi $x_0 + h \in X$ e si ha: $y_0 + k = f(x_0 + h)$ da cui si ha $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Osserviamo ancora che risulta:

$$\lim_{k \rightarrow 0} h = \lim_{k \rightarrow 0} (f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)) = 0$$

perchè f^{-1} è continua in y_0 , vedi teorema di continuità della funzione inversa.

A questo punto abbiamo:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \diamond$$

Osservazione 6.2.1 Senza l'ipotesi 4) il teorema precedente può essere falso.

Si consideri infatti la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = x^3 \forall x \in \mathbb{R}$.

f è ovviamente continua, strettamente crescente e si ha anche $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, quindi esiste la funzione inversa di f che è ancora continua e strettamente crescente, evidentemente risulta

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Infine si verifica facilmente che si ha $f'(0) = 0$ mentre $\nexists (f^{-1})'(0)$. $\diamond$

Esempio 6.2.11 (Derivata di alcune funzioni inverse.) Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa determiniamo la derivata delle funzioni inverse di alcune funzioni trigonometriche elementari. Si hanno le seguenti relazioni:

1. $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[;$
2. $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[;$
3. $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R};$

Per verificare la prima relazione considero $x \in]-1, 1[$, posto allora $y = \arcsin x$ si ha $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ed inoltre è $\sin y = x$. Allora facendo uso del teorema (5.2.4) ed essendo anche $D \sin y = \cos y \neq 0$ risulta:

$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

È utile in questo caso verificare la formula data anche in modo diretto, cioè facendo uso del limite della funzione rapporto incrementale. Questo studio diretto ci consentirà di far vedere come mai la funzione considerata non è derivabile agli estremi dell'intervallo di definizione; si noti anche che la formula della derivata non ha senso per $x = -1$ e per $x = 1$.

Per questo considero $x \in]-1, 1[$ ed $h \neq 0$ tale che $x + h \in]-1, 1[$.

La funzione rapporto incrementale è data da

$$\frac{\arcsin(x + h) - \arcsin x}{h}.$$

Ora se si pone $y = \arcsin x$, risulta ovviamente $x = \sin y$. Inoltre posto anche $k = \arcsin(x + h) - \arcsin x$, si ha $k = \arcsin(x + h) - y$, $\arcsin(x + h) = y + k$, $x + h = \sin(y + k)$ e infine $h = \sin(y + k) - \sin y$.

Pertanto è

$$\frac{\arcsin(y + h) - \arcsin x}{h} = \frac{k}{\sin(y + k) - \sin y} = \frac{1}{\frac{\sin(y+k) - \sin y}{k}}.$$

Tenendo poi presente che se $h \rightarrow 0$ allora si ha anche $k \rightarrow 0$ perchè la funzione $\arcsin$ è continua si può dire che risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x + h) - \arcsin x}{h} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(y+k) - \sin y}{k}} = \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Si può osservare a questo punto che, come si è detto prima, se è $x = 1$ oppure $x = -1$ la formula della derivata non ha senso perchè la sua espressione si riduce alla forma $\frac{1}{0}$.

Inoltre tenendo presente il ragionamento appena fatto con il rapporto incrementale si deduce che risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(1 + h) - \arcsin 1}{h} = +\infty$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(-1 + h) - \arcsin(-1)}{h} = +\infty.$$

Naturalmente il primo limite è, in realtà da considerarsi per $h < 0$ ed il secondo limite va considerato per $h > 0$.

Dalle relazioni precedenti si può dedurre allora che

$$\nexists D \arcsin 1 \quad \text{e} \quad \nexists D \arcsin(-1).$$

Per ottenere le altre formule è sufficiente fare un ragionamento analogo a quello appena considerato. $\diamond$

6.3 Derivabilità e monotonia.

Studieremo in questo paragrafo i legami esistenti tra la derivabilità in un punto o in un intervallo e la monotonia di una funzione sempre in un punto oppure in un intervallo.

Definizione 6.3.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

1. f è crescente in $x_o \iff_{def} \begin{cases} \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \\ \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0 \quad \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}. \end{cases}$
2. f è strettamente crescente in $x_o \iff_{def} \begin{cases} \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \\ \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0 \quad \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}. \end{cases}$
3. f è decrescente in $x_o \iff_{def} \begin{cases} \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \\ \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0 \quad \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}. \end{cases}$
4. f è strettamente decrescente in $x_o \iff_{def} \begin{cases} \exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \\ \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} < 0 \quad \forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\}. \end{cases}$

Osservazione 6.3.1 Ovviamente se f è strettamente crescente (decrescente) in x_o allora f è crescente (decrescente) in x_o . Non vale ovviamente il viceversa.

Teorema 6.3.1 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. f è crescente in x_o ;
2. $\exists f'_-(x_o)$ ed $\exists f'_+(x_o)$

Tesi: $f'_-(x_o) \geq 0$ ed $f'_+(x_o) \geq 0$.

Dimostrazione: La dimostrazione segue dalla definizione e dal teorema della permanenza del segno per il limite. $\diamond$

Ovviamente vale l'analogo enunciato:

Teorema 6.3.2 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. f è decrescente in x_o ;
2. $\exists f'_-(x_o)$ ed $\exists f'_+(x_o)$

Tesi: $f'_-(x_o) \leq 0$ ed $f'_+(x_o) \leq 0$. $\diamond$

Teorema 6.3.3 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: $\exists f'_-(x_o) > 0$ ed $\exists f'_+(x_o) > 0$

Tesi: f è strettamente crescente in x_o .

Dimostrazione: Segue dal teorema della permanenza del segno. $\diamond$

Teorema 6.3.4 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che: $\exists f'_-(x_o) < 0$ ed $\exists f'_+(x_o) < 0$

Tesi: f è strettamente decrescente in x_o .

Dimostrazione: Segue dal teorema della permanenza del segno. $\diamond$

Osservazione 6.3.2 Se nei due teoremi precedenti si suppone che esiste $f'(x_o)$ allora se f è crescente in x_o si ha $f'(x_o) \geq 0$, mentre se f è decrescente in x_o si ha $f'(x_o) \leq 0$. Inoltre se è $f'(x_o) > 0$ allora f è strettamente crescente in x_o , mentre se è $f'(x_o) < 0$ allora f è strettamente decrescente in x_o .

Teorema 6.3.5 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. x_o è punto di massimo relativo per f .
2. $\exists f'_-(x_o)$ ed $\exists f'_+(x_o)$

Tesi: $f'_-(x_o) \geq 0$ ed $f'_+(x_o) \leq 0$.

Dimostrazione: Poichè x_o è di massimo relativo per f , esiste $I \in \mathcal{I}(x_o)$ tale che $f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in I \cap X$. Inoltre poichè $x_o \in X^\circ$ si può anche supporre che $I \subseteq X$. Passando poi al rapporto incrementale si ha:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0 \quad \forall x \in I \cap X \cap]-\infty, x_o[$$

ed

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0 \quad \forall x \in I \cap X \cap]x_o, +\infty[.$$

Passando ora al limite per $x \rightarrow x_o^-$ e per $x \rightarrow x_o^+$ rispettivamente ed utilizzando il teorema della permanenza del segno si ha la tesi, cioè $f'_-(x_o) \geq 0$ ed $f'_+(x_o) \leq 0$. $\diamond$

Teorema 6.3.6 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. x_o è punto di minimo relativo per f .
2. $\exists f'_-(x_o)$ ed $\exists f'_+(x_o)$

Tesi: $f'_-(x_o) \leq 0$ ed $f'_+(x_o) \geq 0$.

Dimostrazione: Analoga a quella del teorema precedente. $\diamond$

Teorema 6.3.7 (di FERMAT) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. x_o è punto di massimo o di minimo relativo per f .
2. $x_o \in X^\circ$
3. $\exists f'(x_o)$

Tesi: $f'(x_o) = 0$.

Dimostrazione: Se per assurdo fosse $f'(x_o) \neq 0$, il punto x_o non sarebbe nè di massimo nè di minimo per f . $\diamond$

Ovviamente non vale il viceversa. Cioè non è vero che se x_o è interno ad X e se $\exists f'(x_o) = 0$ allora il punto x_o può non essere nè di massimo e nè di minimo relativo per f .

Si consideri infatti la funzione $f(x) = x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Per essa si ha $f'(0) = 0$ ma $x = 0$ è un punto in cui f è strettamente crescente.

Utilizzando invece l'eventuale informazione sul segno della derivata prima a sinistra ed a destra si hanno i seguenti risultati.

Teorema 6.3.8 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: $\exists f'_-(x_o) > 0$ ed $\exists f'_+(x_o) < 0$.*

Tesi: x_o è punto di massimo relativo per f .

Dimostrazione: Per avere la tesi occorre e basta far vedere che

$$\exists I \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in I \cap X \quad f(x) \leq f(x_o).$$

Dalle ipotesi sul segno della derivata prima a sinistra si ha:

$$\exists H \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in H \cap X \cap]-\infty, x_o[\text{ si ha: } \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} > 0$$

cioè, essendo il denominatore di segno negativo:

$$\exists H \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in H \cap X \cap]-\infty, x_o[\text{ si ha: } f(x) < f(x_o).$$

Allo stesso modo utilizzando il segno della derivata prima da destra in x_o si ha che

$$\exists K \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in K \cap X \cap]x_o, +\infty[\text{ si ha: } \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} < 0$$

cioè, essendo il denominatore di segno positivo:

$$\exists K \in \mathcal{I}(x_o) : \quad \forall x \in K \cap X \cap]x_o, +\infty[\text{ si ha: } f(x) < f(x_o).$$

Considerando infine $I = H \cap K$ si ha la tesi perchè risulta:

$$\forall x \in I \cap X \setminus \{x_o\} \text{ si ha: } f(x) < f(x_o). \diamond$$

Ovviamente vale anche il seguente risultato.

Teorema 6.3.9 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, $x_o \in X^\circ$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: $\exists f'_-(x_o) < 0$ ed $\exists f'_+(x_o) > 0$.*

Tesi: x_o è punto di minimo relativo per f .

Dimostrazione: È simile a quella fatta per il teorema precedente. $\diamond$

Osservazione 6.3.3 *I due teoremi precedenti considerano funzioni f per le quali $\nexists f'(x_o)$. È opportuno però considerare anche i casi in cui f sia derivabile in x_o . In tal caso i risultati che assicurano che un punto x_o sia di massimo o di minimo relativo hanno bisogno di ulteriori condizioni, oltre a quelle sulla derivata prima in x_o , come si vedrà nel seguito. $\diamond$*

Teorema 6.3.10 (di ROLLE.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. f continua su $[a, b]$ (cioè $\forall x_0 \in [a, b] \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$).
2. f derivabile su $]a, b[$ (cioè $\forall x_0 \in]a, b[\quad \exists f'(x_0)$).
3. $f(a) = f(b)$.

Tesi: $\exists \bar{x} \in]a, b[: f'(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione: Poichè f è continua su $[a, b]$ che è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tale che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$; cioè x_1 ed x_2 sono rispettivamente punto di minimo e punto di massimo assoluti per f .

Se risulta anche $f(x_1) = f(x_2)$ allora è $f(x) = f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$, cioè f è costante su $[a, b]$; in tal caso si ha $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Se invece è $f(x_1) < f(x_2)$, posso dire intanto che f non è costante su $[a, b]$, in tal caso verifico che almeno uno dei due punti x_1 e x_2 è interno ad $[a, b]$; cioè risulta $x_1 \in]a, b[$ oppure $x_2 \in]a, b[$.

Se infatti si avesse, per assurdo, $x_1 \notin]a, b[$ e $x_2 \notin]a, b[$ allora entrambi sarebbero estremi di $[a, b]$ ed in tal caso, per l'ipotesi 3., si avrebbe $f(x_1) = f(x_2)$.

Poichè quindi almeno uno dei due punti x_1 e x_2 è interno all'intervallo $[a, b]$, sia ad esempio $x_1 \in]a, b[$. Poichè x_1 è punto di minimo per f e poichè per l'ipotesi 2) esiste $f'(x_1)$, per il teorema di Fermat risulta $f'(x_1) = 0$. Basta allora prendere $\bar{x} = x_1$ per ottenere la tesi. Analoga conseguenza se risulta $x_2 \in]a, b[$. $\diamond$

Osservazione 6.3.4 Il significato geometrico del teorema di Rolle è evidente: si afferma l'esistenza di un punto $\bar{x} \in]a, b[$ che risulta ascissa di un punto del grafico di f le cui coordinate sono $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ in cui la retta tangente al grafico di f , che esiste per ipotesi, è parallela all'asse delle ascisse. $\diamond$

La tesi del teorema di Rolle consente di affermare che esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse delle ascisse. Evidentemente ci sono esempi di grafici di funzioni che non verificano le ipotesi del teorema di Rolle e che possono avere rette tangenti parallele all'asse delle ascisse.

Teorema 6.3.11 (di LAGRANGE.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. f continua su $[a, b]$ (cioè $\forall x_0 \in [a, b] \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$).
2. f derivabile su $]a, b[$ (cioè $\forall x_0 \in]a, b[\quad \exists f'(x_0)$).

Tesi: $\exists \bar{x} \in]a, b[: f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione: Considero una funzione ausiliaria $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \quad \forall x \in [a, b]$.

Per tale funzione, che è somma di f con una restrizione di un polinomio di primo grado in x , sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle. Infatti g è continua su $[a, b]$ ed è derivabile su $]a, b[$ perchè entrambi gli addendi verificano queste condizioni.

Inoltre è $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in]a, b[$. Infine si verifica facilmente che è $g(a) = g(b) = 0$.

Vale dunque per la funzione g la tesi del teorema di Rolle, e dunque $\exists \bar{x} \in]a, b[$ tale che $g'(\bar{x}) = 0$; cioè $\exists \bar{x} \in]a, b[$ tale che $f'(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ che è la tesi. $\diamond$

Osservazione 6.3.5 Anche il teorema di Lagrange ha un significato geometrico molto importante. Infatti poichè $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta che congiunge i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, la tesi afferma che in un opportuno punto del grafico di f di coordinate $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, con $\bar{x} \in]a, b[$, la retta tangente in tale punto, che esiste per ipotesi e che ha coefficiente angolare $f'(\bar{x})$ è parallela alla suddetta retta, cioè risulta: $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Consideriamo ora alcune conseguenze significative del teorema di Lagrange.

Teorema 6.3.12 (Conseguenze del teorema di Lagrange.) Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia:

1. X intervallo
2. f continua su X (cioè $\forall x_0 \in X \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)
3. f derivabile su X° (cioè $\forall x_0 \in X^\circ \exists f'(x_0)$) e poniamo $E = \{x \in X^\circ : f'(x) = 0\}$.

Tesi: a)

$$(f'(x) = 0 \quad \forall x \in X) \iff (\exists k \in \mathbb{R} : f(x) = k \quad \forall x \in X)$$

b)

$$(f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in X^\circ \text{ ed } E^\circ = \emptyset) \iff (f \text{ è strettamente crescente su } X)$$

c)

$$(f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in X^\circ \text{ ed } E^\circ = \emptyset) \iff (f \text{ è strettamente decrescente su } X)$$

Dimostrazione: a) L'implicazione da destra verso sinistra è ovvia; verifico l'altra implicazione cioè quella da sinistra a destra.

Sia $\bar{x} \in X$ un punto fissato e pongo $k = f(\bar{x})$. Provo che $\forall x \in X$ si ha: $f(x) = f(\bar{x})$. Naturalmente basta prendere $x \neq \bar{x}$ e in particolare considero $x < \bar{x}$, il caso $x > \bar{x}$ si tratta in modo analogo.

Per le ipotesi la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[x, \bar{x}]$, quindi ne soddisfa anche la tesi. Esiste pertanto $t \in]x, \bar{x}[$ tale che $f'(t) = \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$. Poichè per ipotesi è anche $f'(t) = 0$, segue che $f(x) - f(\bar{x}) = 0$, cioè $f(x) = f(\bar{x})$.

b) Verifico l'implicazione da sinistra a destra e comincio provando che f è monotona crescente su X . Siano, per questo $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$; per le ipotesi fatte su f sono soddisfatte, sull'intervallo $[x_1, x_2]$, le ipotesi del teorema di Lagrange per f . Esiste allora $t \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(t) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Poichè risulta $f'(t) \geq 0$ e $x_1 - x_2 < 0$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$. Quindi f è monotona crescente.

Provo ora che in realtà, essendo $E^\circ = \emptyset$, f è strettamente crescente su X ; cioè $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

Per assurdo suppongo che $\exists x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ tale che si abbia $f(x_1) = f(x_2)$. Risulta anche, allora, $f(x_1) = f(x) = f(x_2) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$, e quindi $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]x_1, x_2[$, cioè $]x_1, x_2[\subseteq E$, da cui segue che E ha punti interni, cioè risulta $E^\circ \neq \emptyset$.

Viceversa suppongo f strettamente crescente su X e sia $x \in X^\circ$ un punto fissato. Risulta allora $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > 0 \quad \forall t \in X \setminus \{x\}$.

Passando al limite per $t \rightarrow x$ si ha, per l'ipotesi di esistenza della derivata prima e per il teorema della permanenza del segno, $f'(x) \geq 0$. Verifico ora che l'insieme E dei punti in cui la derivata f' di f è nulla non ha punti interni, cioè $E^\circ = \emptyset$. Suppongo invece che sia $E^\circ \neq \emptyset$ e sia $x_o \in E^\circ$. Per definizione di E° esiste $\delta > 0$ tale che si abbia $]x_o - \delta, x_o + \delta[\subseteq E$, cioè $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]x_o - \delta, x_o + \delta[$.

Pertanto, per il punto a), risulta $f(x) = f(x_o) \quad \forall x \in]x_o - \delta, x_o + \delta[$, da cui segue che f non è strettamente crescente su X .

c) Si prova passando dalla funzione f alla funzione $-f$ ed utilizzando b). $\diamond$

Il seguente risultato è facilmente applicabile allo studio di una funzione.

Teorema 6.3.13 (Conseguenze del teorema di Lagrange.) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia:*

1. X intervallo
2. f continua su X (cioè $\forall x_o \in X \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$)
3. f derivabile su X° (cioè $\forall x_o \in X \exists f'(x_o)$).

Tesi:

- a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X^\circ \implies f$ è strettamente crescente su X
- b) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X^\circ \implies f$ è strettamente decrescente su X

Dimostrazione: Per verificare la a) siano assegnati $x_1 \in X$ ed $x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, dimostro che si ha $f(x_1) < f(x_2)$.

Per il teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$ esiste $\bar{x} \in]x_1, x_2[$ tale che si abbia:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Poiché per ipotesi si ha anche $f'(\bar{x}) > 0$, si ha anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Quindi si ha:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

In modo analogo si dimostra la b). $\diamond$

Teorema 6.3.14 (degli zeri per la derivata prima.) *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia:*

1. X intervallo
2. f continua su X (cioè $\forall x_o \in X \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$)
3. f derivabile su X° (cioè $\forall x_o \in X \exists f'(x_o)$).
4. $\exists x_1, x_2 \in X^\circ$ tale che $f'(x_1)f'(x_2) < 0$.

Tesi: $\exists \bar{x} \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$

Dimostrazione: Supponiamo anzitutto che si abbia $f'(x_1) < 0$ ed $f'(x_2) > 0$, verifico che f ha in $]x_1, x_2[$ un punto di minimo, cioè $\exists \bar{x} \in]x_1, x_2[$ tale che $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$. La tesi è ovviamente vera perchè essendo f una funzione continua su $[x_1, x_2]$ che è chiuso e limitato ha anche in tale intervallo sia almeno un punto di minimo e sia almeno un punto di massimo.

Inoltre per le ipotesi sul segno della derivata prima in x_1 ed in x_2 il punto di minimo è certamente interno ad $[x_1, x_2]$. Il teorema di Fermat fornisce allora la tesi. $\diamond$

Teorema 6.3.15 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia:

1. X intervallo
2. f continua su X (cioè $\forall x_o \in X \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$)
3. f derivabile su X° (cioè $\forall x_o \in X \exists f'(x_o)$).
4. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in X^\circ$.

Tesi: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X^\circ$ oppure $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X^\circ$

Dimostrazione: Se per assurdo la tesi fosse falsa, cioè se la derivata prima f' di f non avesse segno costante su X , esisterebbero $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ tali che $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, e allora per il teorema precedente esisterebbe $\bar{x} \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$ che è contro l'ipotesi 4). $\diamond$

Teorema 6.3.16 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia:

1. X intervallo
2. f continua su X (cioè $\forall x_o \in X \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$)
3. f derivabile su X° (cioè $\forall x_o \in X \exists f'(x_o)$).
4. $\exists \bar{x} \in X^\circ$ tale che $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X \cap]-\infty, \bar{x}[$ ed $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap]\bar{x}, +\infty[$.

Tesi: $\bar{x}$ è punto di minimo assoluto (stretto) per f su X , cioè $f(\bar{x}) < f(x) \quad \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\}$

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa, e cioè supponiamo che $\exists x \in X \setminus \{\bar{x}\}$ tale che $f(x) \leq f(\bar{x})$. Supponiamo poi che sia $x < \bar{x}$, analogo ragionamento si può fare se risulta $x > \bar{x}$.

Allora per le ipotesi f soddisfa condizioni del teorema di Lagrange sull'intervallo $[x, \bar{x}]$, esiste allora $t \in [x, \bar{x}]$ tale che $f'(t) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \geq 0$, che è contro l'ipotesi 4). $\diamond$

Allo stesso modo del precedente, si può provare il seguente risultato.

Teorema 6.3.17 Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che si abbia:

1. X intervallo
2. f continua su X (cioè $\forall x_o \in X \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$)
3. f derivabile su X° (cioè $\forall x_o \in X \exists f'(x_o)$).
4. $\exists \bar{x} \in X^\circ$ tale che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap]-\infty, \bar{x}[$ ed $f'(x) < 0 \quad \forall x \in X \cap]\bar{x}, +\infty[$.

Tesi: $\bar{x}$ è punto di massimo assoluto (stretto) per f su X , cioè $f(\bar{x}) > f(x) \quad \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\}$. $\diamond$

Teorema 6.3.18 (di CAUCHY.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. f, g continue su $[a, b]$ (cioè $\forall x_o \in [a, b] \exists \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$ ed $\exists \lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = g(x_o)$).
2. f, g derivabili su $]a, b[$ (cioè $\forall x_o \in]a, b[\exists f'(x_o)$ ed $\exists g'(x_o)$).

3. $\forall x \in]a, b[\quad g'(x) \neq 0$.

Tesi: $\exists \bar{x} \in]a, b[: \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dimostrazione: Osservo anzitutto che dalle ipotesi fatte risulta $g(b) - g(a) \neq 0$. Infatti se fosse $g(b) - g(a) = 0$, il teorema di Rolle applicato alla funzione g dice che $\exists \bar{x} \in]a, b[$ tale che $g'(\bar{x}) = 0$, che è contro l'ipotesi 3).

Per verificare la tesi considero una funzione "ausiliaria" $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] \quad \forall x \in [a, b].$$

Tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle, infatti è continua su $[a, b]$ ed è derivabile su $]a, b[$ perchè è ottenuta come combinazione lineare delle funzioni f e g , che verificano le suddette ipotesi di regolarità, mediante i coefficienti $g(b) - g(a)$ ed $f(b) - f(a)$ (che evidentemente non dipendono da $x \in [a, b]$).

La derivata della funzione h , ottenibile dalle regole di derivazione, è data dalla formula:

$$h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)] \quad \forall x \in]a, b[.$$

Infine si verifica facilmente che è: $h(a) = h(b) (= f(a)g(b) - f(b)g(a))$. Allora, per il teorema di Rolle, $\exists \bar{x} \in]a, b[: h'(\bar{x}) = 0$, cioè: $f'(\bar{x})[g(b) - g(a)] - g'(\bar{x})[f(b) - f(a)] = 0$ da cui segue la tesi. $\diamond$

È possibile collegare logicamente tra loro i tre teoremi fondamentali di Rolle, di Lagrange e di Cauchy affermando, che a due a due, essi sono perfettamente equivalenti tra loro quando si considerino nella classe delle funzioni continue su $[a, b]$ (con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $a < b$) e derivabili su $]a, b[$.

Infatti il teorema di Rolle implica il teorema di Lagrange ed il teorema di Cauchy perchè questi ultimi sono stati provati utilizzando tale enunciato.

Brevemente possiamo scrivere $R \implies L$ ed $R \implies C$.

Inoltre il teorema di Lagrange implica il teorema di Rolle perchè il primo ha una ipotesi in meno del secondo (infatti nulla si dice nel teorema di Lagrange sui valori $f(a)$ ed $f(b)$) ed inoltre se nel teorema di Lagrange si aggiunge l'informazione $f(a) = f(b)$ non solo le ipotesi coincidono con quelle di Rolle ma anche la tesi del teorema di Lagrange diventa la tesi del teorema di Rolle. Possiamo allora scrivere $L \implies R$.

Quindi si ha: $R \iff L$.

Ancora il teorema di Cauchy implica il teorema di Lagrange perchè se consideriamo la funzione $g(x) = x \quad \forall x \in [a, b]$ le ipotesi e la tesi del teorema di Cauchy diventano rispettivamente le ipotesi e la tesi del teorema di Lagrange.

Quindi si può anche scrivere $C \implies L$.

Infine si può dire che il teorema di Cauchy implica il teorema di Rolle, cioè $C \implies R$, perchè essendo $C \implies L$ ed $L \implies R$ si può utilizzare la proprietà transitiva della implicazione.

Si può allora concludere che si ha $R \iff L$, $L \iff C$, e quindi $R \iff C$. $\diamond$

6.4 I teoremi di L'HOSPITAL.

Le forme indeterminate sono state esaminate nel paragrafo relativo ai limiti notevoli. In questo paragrafo considereremo la possibilità di riesaminare le forme indeterminate attraverso alcuni risultati dati dai teoremi di L'HOSPITAL.

Considereremo prima i risultati relativi alle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Saranno considerate poi le altre cinque forme indeterminate.

Teorema 6.4.1 (di L'HOSPITAL: prima versione per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

1. $f(b) = g(b) = 0$;
2. $\exists f'(b), \exists g'(b) \neq 0$.

Tesi: $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$

Dimostrazione: La tesi si ottiene facilmente osservando che $\forall x \in [a, b[$ si ha:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{\frac{f(x)-f(b)}{x-b}}{\frac{g(x)-g(b)}{x-b}}.$$

Passando al limite per $x \rightarrow b^-$ e tenendo conto delle ipotesi fatte di esistenza delle derivate di f e di g in $x = b$ si ottiene la tesi. $\diamond$

Teorema 6.4.2 (di L'HOSPITAL seconda versione per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tali che sia:

1. $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$
2. f e g derivabili su $[a, b[$.
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b[$.
4. $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$

Tesi: $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$

Dimostrazione: I) Supponiamo anzitutto $b \in \mathbb{R}$, e osserviamo che è possibile per l'ipotesi 1), prolungare con continuità le funzioni f e g in $x = b$ ponendo $f(b) = g(b) = 0$.

Per avere la tesi basta tenere presente la definizione di limite. Sia allora $J \in \mathcal{I}(\ell)$, per l'ipotesi 4) esiste $\delta > 0$ tale che $\forall t \in [a, b[\cap]b - \delta, b + \delta[$ si abbia $\frac{f'(t)}{g'(t)} \in J$.

Verifico che $I =]b - \delta, b + \delta[$ va bene anche per la tesi. Infatti sia $x \in I \cap [a, b[$, allora per il teorema di Cauchy applicato all'intervallo $[x, b]$ esiste $t(x) \in]x, b[$ tale che si abbia

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}$$

e poichè $t(x) \in I \cap [a, b[$ si ha, e cioè $\frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} \in J$.

II) Sia ora $b = +\infty$. Senza ledere la generalità del risultato, che riguarda comunque il limite per $x \rightarrow +\infty$, possiamo supporre $a > 0$. Se infatti fosse $a \leq 0$ potremmo considerare le restrizioni h e k di f e di g rispettivamente all'intervallo $[1, +\infty[$.

Poichè ovviamente risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{k(x)}$$

basta dimostrare il teorema per h e k che comunque continuano a verificare le analoghe ipotesi di f e di g . Supposto allora $a > 0$, considero $c \in \mathbb{R}$, $c > a$ e considero anche le funzioni

$$p, q : [a, c[\longrightarrow \mathbb{R}$$

definite rispettivamente dalle relazioni

$$p(y) = f\left(\frac{a}{c-y}\right) \quad \forall y \in [a, c[\quad \text{e} \quad q(y) = g\left(\frac{a}{c-y}\right) \quad \forall y \in [a, c[.$$

Evidentemente le funzioni p e q sono nella situazione I) dove è stato supposto $b \in \mathbb{R}$. Inoltre ovviamente $\exists \lim_{y \rightarrow c} p(y) = 0$ ed $\exists \lim_{y \rightarrow c} q(y) = 0$, p e q sono derivabili perchè composte mediante funzioni derivabili ed, essendo $q'(y) = g'\left(\frac{a}{c-y}\right) \frac{a}{(c-y)^2}$ è $q'(y) \neq 0 \quad \forall y \in [a, c[$. Infine si ha:

$$\exists \lim_{y \rightarrow c} \frac{p'(y)}{q'(y)} = \lim_{y \rightarrow c} \frac{f'\left(\frac{a}{c-y}\right) \frac{a}{(c-y)^2}}{g'\left(\frac{a}{c-y}\right) \frac{a}{(c-y)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Allora per la parte I della dimostrazione risulta

$$\exists \lim_{y \rightarrow c} \frac{p(y)}{q(y)} = \ell \quad \text{cioè} \quad \exists \lim_{y \rightarrow c} \frac{f\left(\frac{a}{c-y}\right)}{g\left(\frac{a}{c-y}\right)} = \ell;$$

tornando ora alla variabile x e ponendo $x = \frac{a}{c-y}$ si ha la tesi, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \diamond$$

Teorema 6.4.3 (di L'HOSPITAL per la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tali che sia:

$$1. \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \notin \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) \notin \mathbb{R};$$

2. f e g derivabili su $[a, b[$.

$$3. \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Dimostrazione: Osserviamo anzitutto che per l'ipotesi 1) e per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno I di b tale che $\forall x \in [a, b[\cap I$ si ha $g'(x) \neq 0$.

Supponiamo $\ell \in \mathbb{R}$, il caso $\ell \notin \mathbb{R}$ è lasciato al lettore. Per avere la tesi verifico che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} < b : \quad \forall x \in [a, b[\cap]\bar{x}, b[\quad \text{si ha:} \quad \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \varepsilon.$$

Per l'ipotesi 4) fissato $\alpha > 0 \quad \exists \bar{y} \in \mathbb{R}, \quad \bar{y} < b$ tale che $\forall t \in [a, b[\cap]\bar{y}, b[$ si ha: $\ell - \alpha < \frac{f'(t)}{g'(t)} < \ell + \alpha$.

Prendo $\bar{y}$ tale che si abbia anche $a < \bar{y}$.

Se ora considero la funzione

$$\psi(x) = \frac{1 + \frac{f(\bar{y})}{f(x) - f(\bar{y})}}{1 + \frac{g(\bar{y})}{g(x) - g(\bar{y})}}$$

possiamo affermare, essendo $\lim_{x \rightarrow b} \psi(x) = 1$, che $\exists \bar{z} \in \mathbb{R} \quad \bar{z} < b$ tale che $\forall x \in [a, b[\cap]\bar{z}, b[$ si ha: $1 - \alpha < \psi(x) < 1 + \alpha$.

Consideriamo ora $\alpha < 1$.

Allora preso $\bar{x} = \max\{\bar{y}, \bar{z}\}$, si ha anche $a < \bar{x} < b$, e inoltre $\forall t \in [a, b[\cap]\bar{x}, b[\quad e \quad \forall x \in [a, b[\cap]\bar{x}, b[$ vale la seguente relazione:

$$(\ell - \alpha)(1 - \alpha) < \frac{f'(t)}{g'(t)} \psi(x) < (\ell + \alpha)(1 + \alpha).$$

Considerato poi $t \in]\bar{x}, b[$ tale che, per il teorema di Cauchy, si abbia anche

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

risulta

$$(\ell - \alpha)(1 - \alpha) < \frac{f(x)}{g(x)} < (\ell + \alpha)(1 + \alpha).$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$, considero $\alpha > 0$ tale che si abbia $\ell - \varepsilon < (\ell - \alpha)(1 - \alpha)$ ed $(\ell + \alpha)(1 + \alpha) < \ell + \alpha$ e considero $\bar{x} \in [a, b[$ prima individuato.

Di conseguenza

$$\forall x \in [a, b[\cap]\bar{x}, b[\quad \text{si ha} \quad \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \varepsilon. \diamond$$

Osservazione 6.4.1 È opportuno notare che i teoremi di l'HOSPITAL sono solo condizioni sufficienti. È possibile cioè che si verifichi la tesi senza che siano verificate le ipotesi (tutte o in parte).

Si considerino infatti le seguenti funzioni $f(x) = 2x + \sin x$ e $g(x) = 2x + \cos x + 3$; evidentemente entrambe divergono positivamente per $x \rightarrow +\infty$ e verificano anche le ipotesi 2) del precedente teorema.

Inoltre essendo anche $f'(x) = 2 + \cos x$ e $g'(x) = 2 - \sin x$, non è verificata la terza ipotesi perchè: $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x}$.

Va però notato che è vera la tesi del teorema, cioè:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{2x + \cos x + 3} = 1.$$

Infatti dividendo numeratore e denominatore per $x > 0$ si ha:

$$\frac{2x + \sin x}{2x + \cos x + 3} = \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x} + \frac{3}{x}},$$

e siccome

si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ si ottiene la tesi applicando ora il criterio del rapporto. $\diamond$

Come si è osservato a suo tempo le forme indeterminate sono sette. Due sono relative al rapporto e per tali forme esistono i teoremi di L'Hospital. Per le altre cinque forme non esistono regole tipo L'Hospital. Si possono trasformare in modo che sia possibile far ricorso ai risultati visti in questo paragrafo.

Per questo siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

Osservazione 6.4.2 (La forma indeterminata dell'addizione.)

Per esaminare la forma indeterminata relativa all'addizione, per esempio $+\infty - \infty$, supponiamo che si abbia:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = -\infty$$

e che si debba determinare il:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} (f(x) + g(x)).$$

Se si vuole applicare il teorema relativo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ è sufficiente considerare, per le x per cui si ha $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ la seguente relazione:

$$f(x) + g(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Analogo ragionamento se si ha la forma $-\infty + \infty$.

Osservazione 6.4.3 (La forma indeterminata della moltiplicazione.)

Per la forma indeterminata relativa alla moltiplicazione, ad esempio $0 \cdot (+\infty)$, si supponga di avere:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$$

e che si debba determinare il:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} (f(x) \cdot g(x)).$$

Se si vuole applicare il teorema relativo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ è sufficiente considerare, per le x per cui si ha $g(x) \neq 0$ la seguente relazione:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Analogo ragionamento se si hanno le forme $0 \cdot (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$.

Osservazione 6.4.4 (La forma indeterminata della potenza.)

Le forme indeterminate della potenza $1^{+\infty}$, 0^0 e $(+\infty)^0$ si ottengono nel caso si debba determinare il limite di una funzione del tipo

$$[f(x)]^{g(x)}.$$

In tal caso ci si può ricondurre sostanzialmente alla forma indeterminata della moltiplicazione ricorrendo, per le x per cui si ha $f(x) > 0$, alla relazione

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log[f(x)]}.$$

6.5 La formula di TAYLOR.

Si vuole affrontare in questo paragrafo il problema dell'approssimazione di una funzione mediante un polinomio che, come noto, sulla variabile utilizza solo le operazioni di addizione e di moltiplicazione. Questo è possibile nel caso in cui la funzione ammette le derivate di ordine superiore fino ad $n \in \mathbb{N}$ assegnato. Consideriamo ora alcuni risultati che consentono di ottenere il risultato.

Definizione 6.5.1 (Il polinomio di Taylor.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Siano assegnati anche $x_o \in]a, b[$ ed $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

1. $\exists f^{(k)}(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad e \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1$
2. $\exists f^{(n)}(x_o)$

Si chiama polinomio di Taylor di grado n e di punto iniziale x_o di f la funzione $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita $\forall x \in \mathbb{R}$ dalla relazione:

$$P_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + \frac{f^{(3)}(x_o)}{3!}(x-x_o)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_o)}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$$

Si noti che per $n = 1$ il polinomio di Taylor di grado 1

$$P_1(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$.

Se è $n = 2$ si ha il polinomio di Taylor di grado 2

$$P_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

prende il nome di parabola tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$.

Per $n = 3$ si dice che è definita la cubica tangente in $(x_o, f(x_o))$ al grafico di f .

In generale, assegnato $n \in \mathbb{N}$, si dice che il polinomio di Taylor definisce la curva tangente di ordine n al grafico di f nel punto di coordinate $(x_o, f(x_o))$.

Il polinomio di Taylor verifica il seguente risultato.

Teorema 6.5.1 (di Taylor) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Siano assegnati anche $x_o \in]a, b[$ ed $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

1. $\exists f^{(k)}(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad e \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1$

$$2. \exists f^{(n)}(x_o)$$

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_o)^n} = 0$$

Dimostrazione: Per avere la tesi occorre osservare il limite della tesi si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se ci si limita a valutare separatamente il limite del numeratore e del denominatore.

Se si ha $n = 1$ occorre osservare che l'ipotesi 1) del teorema non ha senso e che vale solo l'ipotesi 2). Il limite da studiare si scrive allora nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - P_1(x)}{(x - x_o)} &= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o)}{(x - x_o)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_o} \left[\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} - f'(x_o) \right] = [f'(x_o) - f'(x_o)] = 0. \end{aligned}$$

La tesi segue dall'ipotesi di esistenza della derivata di f in x_o .

Sia ora $n > 1$.

In tal caso le ipotesi date consentono di applicare il secondo teorema di l'Hospital. la sua applicazione fornisce lo studio del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{n(x - x_o)^{n-1}}.$$

In tal caso però la forma indeterminata non risulta eliminata. Occorre allora riapplicare lo stesso teorema. Applicando lo stesso $n - 1$ volte si ottiene da studiare il limite seguente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f^{n-1}(x) - P_n^{n-1}(x)}{n!(x - x_o)} &= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_o) - f^n(x_o)(x - x_o)}{n!(x - x_o)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_o} \left[\frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_o)}{x - x_o} - f^n(x_o) \right]. \end{aligned}$$

Ovviamente si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \left[\frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_o)}{x - x_o} - f^n(x_o) \right] = [f^n(x_o) - f^n(x_o)] = 0$$

perchè l'ipotesi 2) prevede che esista la derivata di ordine n in x_o di f . $\diamond$

Il teorema appena provato consente, come accennato precedentemente, di definire la formula di Taylor della funzione f di ordine n e di punto iniziale x_o .

Definizione 6.5.2 (La formula di Taylor con resto nella forma di Peano.) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Siano assegnati anche $x_o \in]a, b[$ ed $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

$$1. \exists f^{(k)}(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad e \quad \forall k = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$2. \exists f^{(n)}(x_o)$$

Ponendo $\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_o)^n} = \omega(x_o, x)$ si ha $\lim_{x \rightarrow x_o} \omega(x_o, x) = 0$ e quindi risulta $f(x) = P_n(x) + \omega(x_o, x)(x - x_o)^n$.

L'espressione $R_n(x_o, x) = \omega(x_o, x)(x - x_o)^n$ si definisce il resto nella forma di Peano.

L'espressione

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x_0, x)$$

prende il nome di formula di Taylor di ordine n della funzione f di punto iniziale x_0 .

Vale anche il seguente risultato che in qualche modo, insieme con il precedente, caratterizza il polinomio di Taylor di una funzione e ne mette in evidenza l'unicità.

Teorema 6.5.2 (Unicità del polinomio di Taylor) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Siano assegnati anche $x_0 \in]a, b[$ ed $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che*

1. $\exists f^{(k)}(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad e \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1$
2. $\exists f^{(n)}(x_0)$
3. *Siano $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ tali che, considerando il seguente polinomio:*

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

si abbia

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Tesi:

$$Q_n(x) = P_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cioè si ha:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Dimostrazione: preliminarmente osservo che dalla ipotesi:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

segue anche che:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x - x_0)^k} = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Considero il caso $k = 0$, si ha:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - Q_n(x)) = 0$$

da essa segue l'uguaglianza: $a_0 = f(x_0)$.

Sostituisco al posto di a_0 il valore $f(x_0)$; tengo conto poi che si ha:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x - x_0)} = 0$$

Otengo anche $a_1 = f'(x_0)$.

Sostituisco ora $f'(x_o)$ al posto di a_1 e considero il limite seguente:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x - x_o)^2} = 0$$

Da esso segue che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o) - a_2(x - x_o)^2}{(x - x_o)^2} = 0.$$

Aggiungendo e sottraendo al numeratore della frazione il termine

$$\frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

e tenendo anche conto che, per il teorema precedente, risulta:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - f'(x_o)(x - x_o) - \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2}{(x - x_o)^2} = 0$$

si deduce che $a_2 = \frac{f''(x_o)}{2!}$

Ragionando in modo analogo si ottengono le altre uguaglianze. $\diamond$

È possibile definire un'altra formula di Taylor di punto iniziale x_o di una funzione f . Quella con il resto nella forma di Lagrange. Il risultato che ne consente la definizione è il seguente:

Teorema 6.5.3 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Siano assegnati anche $x_o \in]a, b[$ ed $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che*

1. $\exists f^{(k)}(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad e \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1$
2. $\exists f^{(n)}(x) \quad \forall x \in]a, b[\setminus \{x_o\}$

Tesi: $\forall x \in [a, b] \quad \exists \bar{x}$ intermedio tra x e $\bar{x}$ tale che

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \frac{f'''(x_o)}{3!}(x - x_o)^3 + \dots +$$

$$\frac{f^{(n-1)}(x_o)}{(n-1)!}(x - x_o)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_o)^n = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_o)^n.$$

Dimostrazione: Sia $x \in [a, b]$ e supponiamo che si abbia anche $x_o < x$. Per il caso $x < x_o$ il ragionamento è simile.

La tesi si ottiene applicando ripetutamente il teorema di Cauchy alla funzione $\alpha(t) = f(t) - P_{n-1}(t)$ ed alla funzione $\beta(t) = (t - x_o)^n$ quando t varia nell'intervallo $[x_o, x]$, tenendo conto che si ha $\alpha(x_o) = 0$ e $\beta(x_o) = 0$.

Applicando una volta il suddetto teorema esiste $t_1 \in]x_o, x[$ tale che:

$$\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_o)^n} = \frac{f'(t_1) - P'_{n-1}(t_1)}{n(t_1 - x_o)^{n-1}}.$$

Adesso si riapplica il teorema di Cauchy sull'intervallo $[x_o, t_1]$ per le funzioni $\alpha'(t)$ e $\beta'(t)$ dopo aver osservato che per esse sono verificate le relative ipotesi ed aver osservato che si ha $\alpha'(x_o) = 0$ e $\beta'(x_o) = 0$.

Si trova allora $t_2 \in]x_o, t_1[$ tale che si ha:

$$\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_o)^n} = \frac{f'(t_1) - P'_{n-1}(t_1)}{n(t_1 - x_o)^{n-1}} = \frac{f'(t_2) - P'_{n-1}(t_2)}{n(n-1)(t_2 - x_o)^{n-2}}.$$

Si riapplica ora lo stesso teorema di Cauchy alle derivate seconde trovate sull'intervallo $[x_o, t_2]$ e si trova $t_3 \in]x_o, t_2[$.

Continuando il ragionamento fino alla derivata di ordine n si trova che $P_{n-1}^{(n)}(t) = 0$ e che esiste $t_n \in]x_o, t_{n-1}[$ tale che si ha:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_o)^n} &= \frac{f'(t_1) - P'_{n-1}(t_1)}{n(t_1 - x_o)^{n-1}} = \\ &= \frac{f'(t_2) - P'_{n-1}(t_2)}{n(n-1)(t_2 - x_o)^{n-2}} = \dots = \frac{f^{(n-1)}(t_{n-1}) - P_{n-1}^{(n-1)}(t_{n-1})}{n!(t_{n-1} - x_o)} = \\ &= \frac{f^{(n)}(t_n) - P_{n-1}^{(n)}(t_n)}{n!}. \end{aligned}$$

Tenendo conto anche che si ha $P_{n-1}^{(n)}(t) = 0$ risulta verificata la tesi se si considera $\bar{x} = t_n$. Si ha allora:

$$\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_o)^n} = \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}. \diamond$$

Osservazione 6.5.1 (La formula di Taylor della funzione $f(x) = e^x$.)

Si consideri la funzione $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Posto $x_o = 0$ consideriamo la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Peano e con il resto nella forma di Lagrange.

Per la funzione data si ha $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$, quindi si ha $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Il polinomio di ordine n di punto iniziale 0 é:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}.$$

La formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Peano si scrive nel modo seguente:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + R_n(0, x)$$

Lasciando inalterato n , la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Lagrange si scrive nel modo seguente:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{x}$ intermedio tra 0 ed x , cioè $\bar{x} \in]x, 0[$ se si ha $x < 0$ oppure $\bar{x} \in]0, x[$ se si ha $0 < x$, tale che:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\bar{x}^n}{n!}.$$

Ne segue che il polinomio approssimante la stessa funzione esponenziale ha grado n se si considera la formula con il resto di Peano. Mentre nella formula con il resto nella forma di Lagrange il polinomio approssimante ha grado $n - 1$. In questo secondo caso il resto della formula è dato dalla espressione $\frac{\bar{x}^n}{n!}$.

Osservazione 6.5.2 (La formula di Taylor della funzione $f(x) = \log(1+x)$.)

Si consideri la funzione $f(x) = \log(1+x) \quad \forall x > -1$. Posto $x_0 = 0$ consideriamo la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Peano e con il resto nella forma di Lagrange.

Per la funzione data si ha $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k} \quad \forall x > -1 \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, quindi si ha $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e di ordine n é:

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

La formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Peano si scrive nel modo seguente:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^n \frac{x^n}{n} + R_n(0, x)$$

Lasciando inalterato n , la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Lagrange si scrive nel modo seguente: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{x}$ intermedio tra 0 ed x , cioè $\bar{x} \in]x, 0[$ se si ha $x < 0$ oppure $\bar{x} \in]0, x[$ se si ha $0 < x$, tale che:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^n \frac{\bar{x}^n}{n}.$$

Ne segue che il polinomio approssimante la stessa funzione esponenziale ha grado n se si considera la formula con il resto di Peano. Mentre nella formula con il resto nella forma di Lagrange il polinomio approssimante ha grado $n-1$. In questo secondo caso il resto della f

Osservazione 6.5.3 (La formula di Taylor della funzione $f(x) = \sin x$.)

Si consideri la funzione $f(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Posto $x_0 = 0$ consideriamo la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Peano.

Per la funzione data si ha:

$$f^{(4k-3)}(x) = \cos x, \quad f^{(4k-2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4k-1)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4k)}(x) = \sin x \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

quindi si ha:

$$f^{(4k-3)}(0) = 1, \quad f^{(4k-2)}(0) = 0, \quad f^{(4k-1)}(0) = -1, \quad f^{(4k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il polinomio di Taylor di ordine $2n+3$ di punto iniziale 0 é:

$$P_{2n+3}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

La formula di Taylor di ordine $2n+3$ con il resto nella forma di Peano si scrive nel modo seguente:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + R_{2n+3}(0, x).$$

Si vede che lo sviluppo del polinomio di Taylor contiene soltanto potenze con esponente dispari.

Ciò è conseguenza del fatto che la funzione data è dispari; cioè vale la seguente relazione $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 6.5.4 (La formula di Taylor della funzione $f(x) = \cos x$.)

Si consideri la funzione $f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Posto $x_0 = 0$ consideriamo la formula di Taylor di ordine n con il resto nella forma di Peano.

Per la funzione data si ha

$$f^{(4k-3)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4k-2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4k-1)}(x) = \sin x, \quad f^{(4k)}(x) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

quindi si ha

$$f^{(4k-3)}(0) = 0, \quad f^{(4k-2)}(0) = -1, \quad f^{(4k-1)}(0) = 0, \quad f^{(4k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il polinomio di Taylor di ordine $2n+2$ di punto iniziale 0 é:

$$P_{2n+2}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

La formula di Taylor di ordine $2n+2$ con il resto nella forma di Peano si scrive nel modo seguente:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + R_{2n+2}(0, x).$$

Si vede che lo sviluppo del polinomio di Taylor contiene soltanto potenze con esponente pari.

Ciò è conseguenza del fatto che la funzione data è pari; cioè vale la seguente relazione $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

6.6 Derivabilità e convessità-concavità.

La nozione di funzione convessa e di funzione concava è stata già considerata in un capitolo precedente. In questo paragrafo vogliamo riprendere le definizioni e fornire i legami con le derivate.

Definizione 6.6.1 Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f \text{ è convessa su } X \iff_{\text{def}} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in [0, 1] \text{ è} \\ f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$$

$$f \text{ è strettamente convessa su } X \iff_{\text{def}} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in]0, 1[\text{ è} \\ f(tx_2 + (1-t)x_1) < tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$$

$$f \text{ è concava su } X \iff_{\text{def}} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in [0, 1] \text{ è} \\ f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$$

$$f \text{ è strettamente concava su } X \iff_{\text{def}} \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 < x_2 \text{ e } \forall t \in]0, 1[\text{ è} \\ f(tx_2 + (1-t)x_1) > tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \end{cases}$$

Si vede che le definizioni date non presuppongono per f nè la continuità nè la derivabilità.

Di seguito consideriamo alcuni risultati che coinvolgono queste ultime proprietà.

Teorema 6.6.1 Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Tesi:

$$f \text{ è convessa su } X \iff \begin{cases} \forall x_1 \in X^\circ \quad \exists f'_-(x_1), \exists f'_+(x_1), \text{ con } f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \text{ e} \\ f(y) \geq f'_-(x_1)(y - x_1) + f(x_1) \quad \forall y < x_1 \\ f(y) \geq f'_+(x_1)(y - x_1) + f(x_1) \quad \forall y > x_1 \end{cases}$$

Dimostrazione: Sia f è convessa su X , considerato $x_1 \in X^\circ$, verifico che $\exists f'_-(x_1), \exists f'_+(x_1)$ e che si ha $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$.

Per avere la tesi occorre notare che la funzione rapporto incrementale relativa ad x_1 :

$$F_{x_1} : X \setminus \{x_1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad F_{x_1}(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \forall x \in X \setminus \{x_1\}$$

è crescente rispetto ad $x \in X \setminus \{x_1\}$.

Di conseguenza, per il teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone, f è derivabile da sinistra in x_1 cioè

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \sup \left\{ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} : x \in X, x < x_1 \right\} = f'_-(x_1).$$

Inoltre f è derivabile anche da destra in x_1 e si ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \inf \left\{ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} : x \in X, x > x_1 \right\} = f'_+(x_1).$$

Infine essendo anche

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(v) - f(x_1)}{v - x_1} \quad \forall u, v \in X \quad \text{con} \quad u < x_1 < v$$

si ottiene:

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1).$$

Dimostriamo ora le disuguaglianze. Per questo sia $y \in X$ con $y < x_1$. Assegnato poi $u \in]y, x_1[$, e utilizzando la crescenza del rapporto incrementale in x_1 si ha

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1}$$

passando poi al limite $u \rightarrow x_1^-$ si ottiene la relazione:

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq f'_-(x_1)$$

da cui si ha

$$f(y) \geq f(x_1) + f'_-(x_1)(y - x_1)$$

L'altra disuguaglianza si dimostra in modo analogo.

Viceversa per verificare che f è convessa su X siano assegnati $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ e, assegnato anche $\lambda \in [0, 1]$, considero $t = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$.

Per ipotesi si ha

$$f(x_1) \geq f'_-(t)(x_1 - t) + f(t) \quad \text{ed} \quad f(x_2) \geq f'_+(t)(x_2 - t) + f(t).$$

Moltiplicando la prima disuguaglianza per $1 - \lambda$, la seconda per λ e sommando membro a membro si ha:

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq$$

$$(1 - \lambda)f'_-(t)(x_1 - t) + (1 - \lambda)f(t) + \lambda f'_+(t)(x_2 - t) + \lambda f(t) =$$

$$(1 - \lambda)f'_-(t)(x_1 - (1 - \lambda)x_1 - \lambda x_2) + (1 - \lambda)f(t) + \lambda f'_+(t)(x_2 - (1 - \lambda)x_1 - \lambda x_2) + \lambda f(t) =$$

$$\lambda(1 - \lambda)(f'_+(t) - f'_-(t))(x_2 - x_1) \geq f(t) = f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2). \diamond$$

Vale l'analogo enunciato per le funzioni concave.

Teorema 6.6.2 Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Tesi:

$$f \text{ è concava su } X \iff \begin{cases} \forall x_1 \in X^\circ \quad \exists f'_-(x_1), \exists f'_+(x_1), \text{ con } f'_-(x_1) \geq f'_+(x_1) \text{ e} \\ f(y) \leq f'_-(x_1)(y - x_1) + f(x_1) \quad \forall y < x_1 \\ f(y) \leq f'_+(x_1)(y - x_1) + f(x_1) \quad \forall y > x_1 \end{cases}$$

Dimostrazione: Basta osservare che se f è concava allora $-f$ è convessa. Quindi per $-f$ vale il teorema precedente. $\diamond$

Teorema 6.6.3 Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Tesi:

1. $\forall x_\circ \in X^\circ$ f è continua in $x_\circ$, cioè f è continua su X° ;
2. $\forall x_1, x_2 \in X^\circ$ con $x_1 < x_2$ si ha $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$

Dimostrazione:

La proprietà 1) è conseguenza dell'esistenza delle derivate sinistra e destra.

Per dimostrare la seconda proprietà siano assegnati $x_1, x_2 \in X^\circ$ con $x_1 < x_2$. Considerato anche $u, v \in]x_1, x_2[$ con $u < v$; per la monotonia del rapporto incrementale si ha:

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(v) - f(x_1)}{v - x_1} = \frac{f(x_1) - f(v)}{x_1 - v} \leq \frac{f(x_2) - f(v)}{x_2 - v} = \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2}.$$

Determinando ora i limiti

$$\lim_{u \rightarrow x_1^+} \frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1}, \quad \lim_{v \rightarrow x_2^-} \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2}$$

si ha la tesi.

Cioè si ha

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2). \diamond$$

In modo analogo a quello appena dimostrato si dimostra il seguente risultato.

Teorema 6.6.4 *Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ concava.*

Tesi:

1. $\forall x_0 \in X^\circ$ f è continua in x_0 , cioè f è continua su X° ;
2. $\forall x_1, x_2 \in X^\circ$ con $x_1 < x_2$ si ha $f'_+(x_1) \geq f'_-(x_2)$

Si possono considerare ora altre caratterizzazioni che fanno uso di ulteriori ipotesi di regolarità della funzione f .

Teorema 6.6.5 *Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in X^\circ \exists f'(x)$.*

Tesi:

$$(f \text{ è convessa su } X) \iff (\forall x_1 \in X^\circ f(y) \geq f'(x_1)(y - x_1) + f(x_1) \quad \forall y \in X)$$

$$(f \text{ è concava su } X) \iff (\forall x_1 \in X^\circ f(y) \leq f'(x_1)(y - x_1) + f(x_1) \quad \forall y \in X)$$

Dimostrazione: la tesi si ottiene dalle caratterizzazioni precedenti. $\diamond$

Teorema 6.6.6 *Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in X^\circ \exists f'(x)$.*

Tesi:

$$(f \text{ è convessa su } X) \iff (\forall x_1, x_2 \in X^\circ \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f'(x_1) \leq f'(x_2))$$

$$(f \text{ è concava su } X) \iff (\forall x_1, x_2 \in X^\circ \text{ con } x_1 < x_2 \text{ si ha } f'(x_1) \geq f'(x_2))$$

Dimostrazione: Nella prima equivalenza logica l'implicazione da destra a sinistra è conseguenza dell'esistenza della derivata prima di f e del teorema (5.6.4).

Per dimostrare il viceversa considero $x_1, y \in X^\circ$ con $x_1 < y$. Per il teorema di Lagrange applicato ad f sull'intervallo $[x_1, y]$ esiste $t \in]x_1, y[$ tale che si abbia: $f(y) = f(x_1) + f'(t)(y - x_1)$, tenendo conto che si ha $f'(t) \geq f'(x_1)$ si ottiene la disuguaglianza cercata:

$$f(y) \geq f(x_1) + f'(x_1)(y - x_1).$$

Analogo ragionamento si fa se risulta $x_1 > y$.

La verifica dell'altra equivalenza logica è simile. $\diamond$

Teorema 6.6.7 *Sia X un intervallo e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in X^\circ \exists f'(x)$ ed $\exists f''(x)$.*

Tesi:

$$(f \text{ è convessa su } X) \iff (\forall x \in X^\circ \quad f''(x) \geq 0)$$

$$(f \text{ è concava su } X) \iff (\forall x \in X^\circ \quad f''(x) \leq 0)$$

Dimostrazione: la tesi si ottiene osservando ad esempio che la crescita della derivata prima è equivalente alla non negatività della derivata seconda. $\diamond$

CAPITOLO 7

L'INTEGRALE DI RIEMANN.

In questo capitolo si vuole esporre la definizione di integrale di una funzione reale di una variabile reale f secondo Riemann ed alcune sue proprietà fondamentali. Si vuole anche considerare la nozione e qualche relativa proprietà dell'integrale in senso improprio secondo Riemann.

7.1 Definizione dell'integrale di Riemann

La funzione f di cui si vuole definire l'integrale deve verificare alcune condizioni preliminari senza le quali la procedura di definizione non si può dare.

Le condizioni di cui si parla sono due e sono le seguenti: l'insieme su cui f è definita è un intervallo chiuso e limitato ed f stessa deve essere limitata. Quindi:

- I) assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si consideri l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
- II) sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè tale che:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \text{ tale che si abbia } m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Si indicherà con il simbolo $L^\infty([a, b])$ l'insieme di tutte le funzioni reali definite su $[a, b]$ e limitate. Quindi l'integrale di Riemann si definisce per le funzioni f che appartengono alla classe $L^\infty([a, b])$. Se f non appartiene a tale insieme non è definito l'integrale. Per alcuni casi di funzioni che non hanno questa proprietà verrà presentata successivamente in questo capitolo la nozione di integrale improprio, che come dice la stessa denominazione, non sempre rappresenta un integrale.

Per ottenere la definizione di integrale di Riemann di f su $[a, b]$ occorre considerare alcune nozioni preliminari.

Definizione 7.1.1 (Partizione finita) *Assegnato $n \in \mathbb{N}$, una partizione finita di $[a, b]$ è un insieme finito di punti $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ che soddisfano le condizioni seguenti: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.*

Sarà utile anche notare che per $n = 1$ si ottiene la partizione $p_0 = \{x_0, x_1\}$ con $a = x_0$ ed $b = x_1$, essa è denominata partizione banale di $[a, b]$ e sarà particolarmente utile nel seguito.

Si indicherà con $\mathcal{P}([a, b])$ l'insieme di tutte le partizioni finite dell'intervallo $[a, b]$. Per tale insieme vale la seguente proprietà.

Definizione 7.1.2 (Somma integrale) *Assegnata una partizione finita $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ si considerino, per ogni $j = 1, 2, \dots, n$, i valori $m_j = \inf f([x_{j-1}, x_j])$ ed $M_j = \sup f([x_{j-1}, x_j])$.*

Si definisce somma integrale inferiore di f rispetto alla partizione p assegnata il valore:

$$s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}).$$

Si definisce *somma integrale superiore* di f rispetto alla partizione p assegnata il valore:

$$S(f, p) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}).$$

Osservazione 7.1.1 Per ogni j , si ha: $m_j \in \mathbb{R}$ ed $M_j \in \mathbb{R}$.

Infatti poiché f è limitata si ha: $-\infty < \inf f([a, b])$ e $\sup f([a, b]) < +\infty$; inoltre, essendo $[x_{j-1}, x_j] \subseteq [a, b]$, si ha anche: $\inf f([a, b]) \leq \inf f([x_{j-1}, x_j]) = m_j$ ed $M_j = \sup f([x_{j-1}, x_j]) \leq \sup f([a, b])$.

Quindi, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, si ha: $-\infty < \inf f([a, b]) < m_j \leq M_j < \sup f([a, b]) < +\infty$.

Di conseguenza per ogni partizione p di f i valori $s(f, p)$ ed $S(f, p)$ sono numeri reali. $\diamond$

Per le somme integrali inferiori e superiori valgono i seguenti due risultati, il primo di monotonia ed il secondo di separazione.

Teorema 7.1.1 Per ogni $p, q \in \mathcal{P}([a, b])$, con $p \subseteq q$, si ha: $s(f, p) \leq s(f, q)$ ed $S(f, q) \leq S(f, p)$

Dimostrazione: Essendo p e q due insiemi finiti di punti è sufficiente dimostrare la tesi nel caso in cui si passa dalla partizione p alla partizione q aggiungendo un solo punto diverso da quelli appartenenti a p .

Cioè considerata una partizione $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, preso $t \in [a, b]$, si abbia anche, per qualche $j_0 = 1, 2, \dots, n$, $x_{j_0-1} < t < x_{j_0}$ e $q = p \cup \{t\}$.

In tal caso si ha:

$$m_{j_0} = \inf f([x_{j_0-1}, x_{j_0}]) \leq \inf f([x_{j_0-1}, t]) \quad \text{ed} \quad m_{j_0} = \inf f([x_{j_0-1}, x_{j_0}]) \leq \inf f([t, x_{j_0}]).$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} s(f, p) &= \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{j_0-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + m_{j_0}(x_{j_0} - x_{j_0-1}) + \sum_{j=j_0+1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \\ &\sum_{j=1}^{j_0-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + m_{j_0}(t - x_{j_0-1}) + m_{j_0}(x_{j_0} - t) + \sum_{j=j_0+1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \leq \\ &\sum_{j=1}^{j_0-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + \inf f([x_{j_0-1}, t])(t - x_{j_0-1}) + \inf f([t, x_{j_0}]) (x_{j_0} - t) + \\ &\sum_{j=j_0+1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = s(f, p \cup \{t\}) = s(f, q). \end{aligned}$$

Considerando invece la somma integrale superiore si ha:

$$\sup f([x_{j_0-1}, t]) \leq \sup f([x_{j_0-1}, x_{j_0}]) = M_{j_0} \quad \text{e} \quad \sup f([t, x_{j_0}]) \leq \sup f([x_{j_0-1}, x_{j_0}]) = M_{j_0}$$

Pertanto si ha:

$$S(f, p) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{j_0-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_{j_0}(x_{j_0} - x_{j_0-1}) + \sum_{j=j_0+1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{j_0-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + M_{j_0}(t - x_{j_0-1}) + M_{j_0}(x_{j_0} - t) + \sum_{j=j_0+1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \geq \\
& \sum_{j=1}^{j_0-1} M_j(x_j - x_{j-1}) + \sup f([x_{j_0-1}, t])(t - x_{j_0-1}) + \sup f([t, x_{j_0}]) (x_{j_0} - t) + \\
& \sum_{j=j_0+1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) = S(f, p \cup \{t\}) = S(f, q).
\end{aligned}$$

Nel caso in cui tra le due partizioni assegnate p e q , con $p \subseteq q$, esistono h punti $t_1, t_2, \dots, t_h$ con $t_r \neq t_s$ per $r \neq s$, con $t_r \notin p \quad \forall r = 1, 2, \dots, h$ e con $p \cup \{t_1, t_2, \dots, t_h\} = q$, posto $p_r = p \cup \{t_1, t_2, \dots, t_r\} \quad \forall r = 1, 2, \dots, h$, si ha:

$$s(f, p) \leq s(f, p_1) \leq s(f, p_2) \leq \dots s(f, p_h) \leq s(f, q)$$

ed

$$S(f, p) \geq S(f, p_1) \geq S(f, p_2) \geq \dots S(f, p_h) = S(f, q). \diamond$$

Teorema 7.1.2 Per ogni $p, q \in \mathcal{P}([a, b])$ si ha: $s(f, p) \leq S(f, q)$.

Dimostrazione: La tesi é banalmente vera se si ha $p = q = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Infatti in tal caso, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, si ha $m_j \leq M_j$, e quindi é $m_j(x_j - x_{j-1}) \leq M_j(x_j - x_{j-1})$. Sommando sull'indice j da 1 ad n si ha:

$$s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) = S(f, p).$$

Fissate invece due qualunque partizioni p e q si consideri anche $p \cup q$ che é una partizione di $[a, b]$. In tal caso si ha:

$$s(f, p) \leq s(f, p \cup q) \quad \text{ed} \quad S(f, p \cup q) \leq S(f, q)$$

cioé la tesi:

$$s(f, p) \leq S(f, q). \diamond$$

A questo punto restano individuati due insiemi numerici: quello delle somme integrali inferiori e quello delle somme integrali superiori. Indicato con $\mathcal{A}$ il primo e con $\mathcal{B}$ il secondo; posto, cioé, $\mathcal{A} = \{s(f, p) : p \in \mathcal{P}([a, b])\}$ e $\mathcal{B} = \{S(f, q) : q \in \mathcal{P}([a, b])\}$ il teorema appena dimostrato dice che gli insiemi numerici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono separati. Questa proprietá consente di dare la seguente definizione.

Definizione 7.1.3 (Integrale inferiore e Integrale superiore) Si definisce integrale inferiore di f su $[a, b]$ il valore:

$$I_1 = \sup \mathcal{A} = \sup \{s(f, p) \in \mathbb{R} : p \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

si definisce invece integrale superiore di f su $[a, b]$ il valore:

$$I_2 = \inf \mathcal{B} = \inf \{S(f, q) \in \mathbb{R} : q \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Evidentemente dal teorema sulla separazione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si deduce la disuguaglianza $I_1 \leq I_2$.
 É possibile ora dare la definizione di integrale di Riemann.

Definizione 7.1.4 (Integrale di Riemann) *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia assegnata una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, cioè $f \in L^\infty([a, b])$.*

$$(f \text{ é integrabile su } [a, b]) \iff_{def} (I_1 = I_2).$$

Se f é integrabile, il numero reale individuato dalla precedente uguaglianza definisce l'integrale di f su $[a, b]$ e si pone:

$$\int_a^b f(x) dx =_{def} I_1 = I_2.$$

Nel seguito sarà denotato con $\mathcal{R}([a, b])$ l'insieme delle funzioni limitate ed integrabili sull'intervallo $[a, b]$. Di conseguenza per dire che una funzione f limitata é anche integrabile si scriverá $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Ne segue anche, utilizzando la terminologia insiemistica, che si ha: $\mathcal{R}([a, b]) \subseteq L^\infty([a, b])$.

É possibile verificare immediatamente, utilizzando la definizione, che l'insieme $\mathcal{R}([a, b])$ non é vuoto, cioè $\mathcal{R}([a, b]) \neq \emptyset$, facendo vedere ad esempio che se f é una funzione costante allora é anche integrabile e che il suo integrale su $[a, b]$ é facilmente determinabile. Inoltre é possibile anche verificare che non tutte le funzioni limitate su $[a, b]$ sono anche integrabili, cioè, detto in termini insiemistici, che $\mathcal{R}([a, b]) \neq L^\infty([a, b])$ e che quindi l'inclusione di $\mathcal{R}([a, b])$ in $L^\infty([a, b])$ é propria.

Quanto appena detto si trova discusso nelle seguenti due osservazioni.

Osservazione 7.1.2 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$. Tale funzione é integrabile su $[a, b]$ e si ha $\int_a^b f(x) dx = k(b - a)$.*

Per avere la tesi basta osservare che se $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ é una qualunque partizione di $[a, b]$ si ha: $\forall j = 1, 2, \dots, n \quad m_j = M_j = k$ e quindi

$$s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n k(x_j - x_{j-1}) =$$

$$k \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = k(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = k(b - a).$$

Allo stesso modo si prova che $S(f, p) = k(b - a)$. Cioé la tesi. $\diamond$

Osservazione 7.1.3 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tale funzione é nota come funzione di DIRICHELET relativa all'intervallo $[a, b]$. Ovviamente é limitata, cioè $f \in L^\infty([a, b])$. Tale funzione, però, non é integrabile secondo Riemann

su $[a, b]$, cioè $f \notin R([a, b])$. Si noti infine che tale funzione non ha limite in nessun punto di $[a, b]$ e quindi non è continua e che ogni punto razionale è di massimo e ogni punto irrazionale è di minimo per f .

Per verificare che f è limitata si noti che risulta $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [a, b]$. Per verificare invece che non è integrabile si consideri una qualunque partizione $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ di $[a, b]$.

Si ha:

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \quad m_j = 0 \quad \text{ed} \quad M_j = 1$$

quindi

$$s(f, p) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n 0(x_j - x_{j-1}) = 0.$$

Invece per la somma integrale superiore si ha:

$$S(f, p) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n 1(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} = b - a.$$

Poiché la partizione assegnata è arbitraria si può dire che $\mathcal{A} = \{0\}$ e che $\mathcal{B} = \{b - a\}$, cioè che ciascuno dei due insiemi ha un solo elemento; quindi $I_1 = \sup \mathcal{A} = 0$ ed $I_2 = \inf \mathcal{B} = b - a$, cioè $I_1 = 0 < b - a = I_2$. Pertanto f non è integrabile pur essendo limitata. $\diamond$

Utilizzando le proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore è possibile dare la seguente caratterizzazione:

Teorema 7.1.3 *Assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.*

$$f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \text{tale che} \quad S(f, p) - s(f, p) < \varepsilon).$$

Dimostrazione: Dimostro l'implicazione da destra a sinistra. Sia f integrabile e sia assegnato $\varepsilon > 0$. Per le proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore e superiore, esistono p_1 e p_2 partizioni di $[a, b]$ tale che si abbia:

$$I_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, p_1) \leq I_1 \quad \text{e} \quad I_2 \leq S(f, p_2) \leq I_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando ora la partizione $p = p_1 \cup p_2$ si ha:

$$I_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, p_1) \leq s(f, p) \leq S(f, p) \leq S(f, p_2) \leq I_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

e, tenendo presente che per ipotesi si ha $I_1 = I_2$ e semplificando, risulta anche:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, p) \leq S(f, p) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da tale disuguaglianza si deduce la tesi, cioè:

$$0 \leq S(f, p) - s(f, p) \leq \frac{\varepsilon}{2} - (-\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Viceversa, per verificare che f é integrabile, cioè che si ha: $I_1 = I_2$ si può ragionare per assurdo e supporre che si abbia $I_1 < I_2$. In tal caso, considerando $\bar{\varepsilon} = \frac{I_2 - I_1}{3}$, per l'ipotesi esiste $\bar{p}$ tale che si abbia $S(f, \bar{p}) - s(f, \bar{p}) < \bar{\varepsilon} = \frac{I_2 - I_1}{3}$.

Ma poiché risulta anche $s(f, \bar{p}) \leq I_1$ ed $I_2 \leq S(f, \bar{p})$ si ha anche:

$$I_2 - I_1 \leq S(f, \bar{p}) - s(f, \bar{p}) < \frac{I_2 - I_1}{3}$$

cioé:

$$I_2 - I_1 < \frac{I_2 - I_1}{3}$$

che ovviamente non é vero.

Poiché la contraddizione si ottiene supponendo $I_1 < I_2$, deve allora essere $I_1 = I_2$, cioè f é integrabile sull'intervallo $[a, b]$. $\diamond$

7.2 Alcune condizioni sufficienti di integrabilità.

In questo paragrafo si considerano alcune condizioni sufficienti perché una funzione reale e limitata f e definita su $[a, b]$ sia anche integrabile sull'intervallo $[a, b]$.

Alcune di tali condizioni sufficienti saranno lette anche in termini insiemistici; in tal modo sarà possibile verificare che $\mathcal{R}([a, b])$ ha alcuni sottoinsiemi di funzioni già studiati in altri contesti.

Considero il seguente risultato.

Teorema 7.2.1 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia assegnata una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Cioé sia $f \in C([a, b])$.*

Tesi: f é integrabile su $[a, b]$. Cioé: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Dimostrazione: Anzitutto occorre osservare che essendo f continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass, esistono $\bar{u}, \bar{v} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{u}) \leq f(x) \leq f(\bar{v}) \quad \forall x \in [a, b]$. Quindi essa é anche limitata, cioè $f \in L^\infty([a, b])$, pertanto ci si può porre il problema della sua integrabilità.

Per verificare che f é integrabile utilizzo la caratterizzazione dell'integrabilità. Sia allora assegnato $\bar{\varepsilon} > 0$. Poiché, per il teorema di Heine-Cantor, f é anche uniformemente continua sull'intervallo $[a, b]$, in corrispondenza della quantità $\frac{\bar{\varepsilon}}{b-a}$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall u, v \in [a, b]$ se si ha $|u - v| < \delta$ allora si ha anche $|f(u) - f(v)| < \frac{\bar{\varepsilon}}{b-a}$.

Considerato ora $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\frac{b-a}{\bar{n}} < \delta$, prendo la partizione $\bar{p} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\bar{n}}\}$ dell'intervallo $[a, b]$ definita da: $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{\bar{n}}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{\bar{n}}$, $x_3 = a + 3\frac{b-a}{\bar{n}}$, ..., $x_{\bar{n}} = a + \bar{n}\frac{b-a}{\bar{n}} = b$.

A ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$, per $j = 1, 2, 3, \dots, \bar{n}$, applico il teorema di Weierstrass e trovo $u_j, v_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tale che si abbia $f(u_j) \leq f(x) \leq f(v_j) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$. In particolare si noti che per i due punti rispettivamente di minimo e di massimo u_j e v_j di f su $[x_{j-1}, x_j]$ si ha: $|v_j - u_j| < \delta$, quindi si ha anche: $f(v_j) - f(u_j) = |f(v_j) - f(u_j)| < \frac{\bar{\varepsilon}}{b-a}$.

In corrispondenza di tale partizione $\bar{p}$ considero le somme integrali inferiore e superiore.

Osservato allora che $\forall j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ risulta $m_j = f(u_j)$ ed $M_j = f(v_j)$ le somme integrali inferiore e superiore si scrivono rispettivamente nella forma:

$$s(f, \bar{p}) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} f(u_j)(x_j - x_{j-1}) \quad \text{ed} \quad S(f, \bar{p}) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} f(v_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} S(f, \bar{p}) - s(f, \bar{p}) &= \sum_{j=1}^{\bar{n}} (f(v_j) - f(u_j))(x_j - x_{j-1}) < \sum_{j=1}^{\bar{n}} \frac{\bar{\varepsilon}}{b-a} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\bar{\varepsilon}}{b-a} \sum_{j=1}^{\bar{n}} (x_j - x_{j-1}) = \\ &= \frac{\bar{\varepsilon}}{b-a} (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_{\bar{n}} - x_{\bar{n}-1}) = \bar{\varepsilon}. \diamond \end{aligned}$$

Nel teorema appena concluso in realtà é stato dimostrato che vale la seguente inclusione $C([a, b]) \subseteq \mathcal{R}([a, b])$. In effetti l'inclusione é propria, cioè ci sono funzioni integrabili che non sono continue come si vede dai seguenti risultati.

Teorema 7.2.2 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia assegnata una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.*

Sia $m \in \mathbb{N}$ e siano anche assegnati m punti $t_1, t_2, \dots, t_m$ tale che f sia continua sull'insieme $[a, b] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Cioé sia $f \in C([a, b] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_m\})$.

Tesi: f é integrabile su $[a, b]$. Cioé: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Teorema 7.2.3 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia assegnata una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata ed integrabile; siano inoltre $m, M \in \mathbb{R}$ con $m \leq M$ e tale che sia $f([a, b]) \subseteq [m, M]$.*

Sia $g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Tesi: $g \circ f$ é integrabile su $[a, b]$. Cioé: $g \circ f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Dimostrazione: Per avere la tesi utilizzo la caratterizzazione sull'integrabilità. Sia $\varepsilon > 0$, poiché g é anche uniformemente continua, esiste $\delta > 0$, che si può supporre essere anche $\delta < \varepsilon$, tale che $\forall s, t \in [m, M]$ se si ha $|s - t| < \delta$ allora si ha anche $|g(s) - g(t)| < \varepsilon$.

Poiché f é integrabile su $[a, b]$, esiste $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in P([a, b])$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tale che, posto $m_j = \inf f([x_{j-1}, x_j])$ ed $M_j = \sup f([x_{j-1}, x_j])$, si abbia

$$S(f, p) - s(f, p) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \delta^2.$$

A partire dalla partizione p trovata considero anche, $\forall j = 1, 2, \dots, n$,

$$\bar{m}_j = \inf(g \circ f)([x_{j-1}, x_j]) \quad \text{ed} \quad \bar{M}_j = \sup(g \circ f)([x_{j-1}, x_j]).$$

Inoltre considero $J_1 = \{j : M_j - m_j < \delta\}$ ed anche $J_2 = \{j : M_j - m_j \geq \delta\}$.

Per ogni intero $j \in J_1$ vale la disuguaglianza $\bar{M}_j - \bar{m}_j < \varepsilon$, infatti si ha $f([x_{j-1}, x_j]) \subseteq [m_j, M_j]$, e se $u_j \in [m_j, M_j]$ e $v_j \in [m_j, M_j]$ sono rispettivamente il punto di minimo e di massimo di g su $[m_j, M_j]$ essendo anche g uniformemente continua, si ha anche:

$$\bar{M}_j - \bar{m}_j \leq |g(v_j) - g(u_j)| < \varepsilon.$$

Esiste comunque, essendo g anche limitata perché continua su $[m, M]$, $k \in \mathbb{R}$ tale che per ogni intero $j \in J_2$ si abbiano le disuguaglianze $|\overline{m}_j| \leq k$ e $|\overline{M}_j| \leq k$.

In tali condizioni si ha:

$$\begin{aligned}
 S(g \circ f, p) - s(g \circ f, p) &= \sum_{j=1}^n (\overline{M}_j - \overline{m}_j)(x_j - x_{j-1}) = \\
 \sum_{j \in J_1} (\overline{M}_j - \overline{m}_j)(x_j - x_{j-1}) &+ \sum_{j \in J_2} (\overline{M}_j - \overline{m}_j)(x_j - x_{j-1}) < \\
 \sum_{j \in J_1} \varepsilon(x_j - x_{j-1}) &+ \sum_{j \in J_2} 2k(x_j - x_{j-1}) = \\
 \varepsilon \sum_{j \in J_1} (x_j - x_{j-1}) &+ 2k \frac{1}{\delta} \sum_{j \in J_2} \delta(x_j - x_{j-1}) \leq \\
 \varepsilon(b - a) + \frac{2k}{\delta} \sum_{j \in J_2} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) &= \\
 \varepsilon(b - a) + \frac{2k}{\delta} \delta^2 &= \varepsilon(b - a) + 2k\delta \leq \varepsilon(b - a) + 2k\varepsilon = \varepsilon(b - a + 2k). \diamond
 \end{aligned}$$

Dal teorema appena dimostrato si deduce che se f è una funzione limitata ed integrabile su un intervallo $[a, b]$ allora, ad esempio, anche le funzioni $|f|$, f^2 sono integrabili.

Teorema 7.2.4 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia assegnata una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona.*

Tesi: f è integrabile su $[a, b]$. Cioè: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Dimostrazione: Poiché f è monotona su $[a, b]$ allora se è crescente si ha anche $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$ se invece è decrescente allora si ha $f(a) \geq f(x) \geq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$. In ogni caso f è limitata e quindi ha senso verificare se è integrabile.

Il caso $f(a) = f(b)$, essendo f monotona, implica che f è costante; una tale funzione è stato già dimostrato essere integrabile.

Sia f crescente e sia anche $f(a) < f(b)$. Per dimostrare che f è integrabile utilizzo la caratterizzazione. Sia allora assegnato $\bar{\varepsilon} > 0$.

Considerato ora $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\frac{b-a}{\bar{n}} < \frac{\bar{\varepsilon}}{f(b)-f(a)}$, prendo la partizione $\bar{p} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\bar{n}}\}$ dell'intervallo $[a, b]$ definita da: $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{\bar{n}}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{\bar{n}}$, $x_3 = a + 3\frac{b-a}{\bar{n}}$, ..., $x_{\bar{n}} = a + \bar{n}\frac{b-a}{\bar{n}} = b$.

$$\begin{aligned}
 S(f, \bar{p}) - s(f, \bar{p}) &= \sum_{j=1}^{\bar{n}} (f(x_j) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}) < \\
 \sum_{j=1}^{\bar{n}} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \frac{b-a}{\bar{n}} &< \sum_{j=1}^{\bar{n}} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \frac{\bar{\varepsilon}}{f(b) - f(a)} = \\
 \frac{\bar{\varepsilon}}{f(b) - f(a)} \sum_{j=1}^{\bar{n}} (f(x_j) - f(x_{j-1})) &= \frac{\bar{\varepsilon}}{f(b) - f(a)} (f(x_1) - f(x_0) +
 \end{aligned}$$

$$f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_{\bar{n}}) - f(x_{\bar{n}-1}) = \frac{\bar{\varepsilon}}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \bar{\varepsilon} \diamond$$

Come nel caso delle funzioni continue anche per le funzioni monotone si può dare una lettura di carattere insiemistico. Indicando con $\mathcal{M}([a, b])$ l'insieme delle funzioni reali e monotone definite su $[a, b]$, nel teorema appena dimostrato si dice che vale l'inclusione $\mathcal{M}([a, b]) \subseteq \mathcal{R}([a, b])$. Naturalmente anche questa inclusione è propria.

La classe $\mathcal{R}([a, b])$ verifica anche altre proprietà. Alcune di esse sono esposte nei risultati seguenti.

Teorema 7.2.5 (della media integrale) *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia assegnata anche $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.*

Tesi:

1. $(b - a) \inf f([a, b]) \leq I_1 \leq I_2 \leq (b - a) \sup f([a, b]);$
2. $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies (b - a) \inf f([a, b]) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \sup f([a, b]);$
3. $f \in C([a, b]) \implies \exists \bar{x} \in [a, b] \quad (b - a)f(\bar{x}) = \int_a^b f(x) dx.$

Dimostrazione: 1) Per verificare le disuguaglianze scritte basta osservare che considerando la partizione banale $p_o = \{x_o, x_1\}$ con $a = x_o$ ed $b = x_1$, per le relative somme integrali inferiore e superiore si ha:

$$s_o(f, p_o) = (b - a) \inf f([a, b]) \quad \text{ed} \quad S_o(f, p_o) = (b - a) \sup f([a, b]).$$

Quindi, per definizione di integrale inferiore e superiore, si ha la tesi; cioè si ha:

$$(b - a) \inf f([a, b]) \leq I_1 \leq I_2 \leq (b - a) \sup f([a, b]).$$

2) La proprietà è una banale conseguenza della 1) nel caso che f sia integrabile.

3) Se f è continua allora è anche integrabile su $[a, b]$. Inoltre per il teorema dei valori intermedi di Bolzano l'insieme $f([a, b])$ è un intervallo; applicando poi anche il teorema di Weierstrass esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tale che $\inf f([a, b]) = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = \sup f([a, b]) \quad \forall x \in [a, b]$.

Ne segue che $f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$.

Infine si osservi che dalla 2) si ha anche:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \in [f(x_1), f(x_2)] = f([a, b]).$$

Per definizione di immagine di una funzione esiste $\bar{x} \in [a, b]$ tale che si abbia:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \diamond$$

Si vuole considerare ora qualche risultato strutturale dell'insieme $\mathcal{R}([a, b])$ del quale è stato appena dimostrato che contiene l'insieme delle funzioni continue $C([a, b])$ e quello delle funzioni monotone $\mathcal{M}[a, b]$ su $[a, b]$. Per dare tali proprietà strutturali è opportuno considerare alcuni risultati preliminari sul legame tra le somme integrali e le operazioni tra funzioni.

Teorema 7.2.6 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano assegnate anche due funzioni $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitate.*

Tesi:

1. $\forall p, q \in \mathcal{P}([a, b])$ si ha: $s(f, p) + s(g, p) \leq s(f + g, p) \leq S(f + g, q) \leq S(f, q) + S(g, q)$;
2. $\forall p \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \forall \lambda \geq 0, \quad s(\lambda f, p) = \lambda s(f, p) \quad \text{ed} \quad S(\lambda f, p) = \lambda S(f, p)$;
3. $\forall p \in \mathcal{P}([a, b]) \quad \forall \lambda < 0, \quad s(\lambda f, p) = \lambda S(f, p) \quad \text{ed} \quad S(\lambda f, p) = \lambda s(f, p)$.

Dimostrazione: 1) Fissata una qualunque partizione $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ di $[a, b]$ si ha, $\forall j = 1, 2, \dots, n$,

$$\inf f([x_{j-1}, x_j]) \leq f(x) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j] \quad \text{ed anche:} \quad \inf g([x_{j-1}, x_j]) \leq g(x) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

pertanto, sommando membro a membro, si ha:

$$\inf f([x_{j-1}, x_j]) + \inf g([x_{j-1}, x_j]) \leq f(x) + g(x) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

Quindi:

$$\inf f([x_{j-1}, x_j]) + \inf g([x_{j-1}, x_j]) \leq \inf(f + g)([x_{j-1}, x_j])$$

moltiplicando i termini della disuguaglianza per il termine $x_j - x_{j-1}$, che é positivo, si ha:

$$\inf f([x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}) + \inf g([x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}) \leq \inf(f + g)([x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}).$$

Sommando ora ciascun termine sull'indice j da 1 ad n , si deduce che:

$$s(f, p) + s(g, p) \leq s(f + g, p).$$

Fissata ora un'altra qualunque partizione $q = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ con $a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b$ di $[a, b]$ si ha, $\forall h = 1, 2, \dots, m$,

$$f(x) \leq \sup f([y_{h-1}, y_h]) \quad \forall x \in [y_{h-1}, y_h] \quad \text{ed anche:} \quad g(x) \leq \sup g([y_{h-1}, y_h]) \quad \forall x \in [y_{h-1}, y_h]$$

pertanto, sommando membro a membro, si ha:

$$f(x) + g(x) \leq \sup f([y_{h-1}, y_h]) + \sup g([y_{h-1}, y_h]) \quad \forall x \in [y_{h-1}, y_h]$$

Quindi

$$\sup(f + g)([y_{h-1}, y_h]) \leq \sup f([y_{h-1}, y_h]) + \sup g([y_{h-1}, y_h])$$

moltiplicando tutti i termini della disuguaglianza per il termine $y_h - y_{h-1}$, che é positivo, si ha:

$$\sup(f + g)([y_{h-1}, y_h])(y_h - y_{h-1}) \leq \sup f([y_{h-1}, y_h])(y_h - y_{h-1}) + \sup g([y_{h-1}, y_h])(y_h - y_{h-1}).$$

Sommando ora sull'indice h da 1 ad m , si deduce che:

$$S(f + g, q) \leq S(f, q) + S(g, q).$$

2) Per avere la tesi si consideri una qualunque partizione $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ di $[a, b]$ e $\lambda > 0$ occorre provare che, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, si ha:

$$\lambda \inf f([x_{j-1}, x_j]) = \inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \quad \text{e} \quad \lambda \sup f([x_{j-1}, x_j]) = \sup(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]).$$

Infatti si ha:

$$\inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \leq (\lambda f)(x) \leq \sup(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

moltiplicando per $\frac{1}{\lambda}$ ambo i termini della disuguaglianza si ha:

$$\frac{1}{\lambda} \inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \leq f(x) \leq \frac{1}{\lambda} \sup(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

quindi si ha:

$$\frac{1}{\lambda} \inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \leq f(x)$$

cioé

$$\inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]) \leq \lambda \inf f([x_{j-1}, x_j]).$$

Inoltre essendo anche:

$$\inf f([x_{j-1}, x_j]) \leq f(x) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

e moltiplicando per $\lambda > 0$ si ha:

$$\lambda \inf f([x_{j-1}, x_j]) \leq (\lambda f)(x) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$$

ne segue che:

$$\lambda \inf f([x_{j-1}, x_j]) \leq \inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j])$$

e quindi si ha:

$$\lambda \inf f([x_{j-1}, x_j]) = \inf(\lambda f)([x_{j-1}, x_j]).$$

In modo analogo si prova l'uguaglianza con l'estremo superiore.

3) Basta dimostrare la relazione per $\lambda = -1$, cioè che si ha:

$$s(-f, p) = -S(f, p) \quad \text{ed} \quad S(-f, p) = -s(f, p).$$

Con ragionamento analogo a quello visto in 2), considerata una qualunque partizione $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ di $[a, b]$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, si prova che:

$$-\inf f([x_{j-1}, x_j]) = \sup(-f)([x_{j-1}, x_j])$$

e che

$$-\sup f([x_{j-1}, x_j]) = \inf(-f)([x_{j-1}, x_j]).$$

Al lettore la parte rimanente della dimostrazione. $\diamond$

Teorema 7.2.7 *Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano assegnate anche due funzioni $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitate.*

Tesi:

1. $f, g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ e si ha: $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
2. $f \in \mathcal{R}([a, b]), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in \mathcal{R}([a, b])$ e si ha: $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$;
3. $f, g \in \mathcal{R}([a, b]) \implies fg \in \mathcal{R}([a, b])$;
4. $f \in \mathcal{R}([a, b]), f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx \geq 0$;
5. $f, g \in \mathcal{R}([a, b]), f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
6. $f \in \mathcal{R}([a, b]), c \in [a, b] \implies f \in \mathcal{R}([a, c]) \quad f \in \mathcal{R}([c, b]),$ e si ha: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

Dimostrazione: 1) Siano $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ per dimostrare che $f + g$ é integrabile considero $\varepsilon > 0$, per la caratterizzazione dell'integrabilità di f e di g esistono $p_1, p_2 \in \mathcal{P}([a, b])$ tale che si abbia:

$$S(f, p_1) - s(f, p_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ed} \quad S(g, p_2) - s(g, p_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando ora $p = p_1 \cup p_2$, per il teorema precedente si ha anche:

$$s(f, p) + s(g, p) \leq s(f + g, p) \leq S(f + g, p) \leq S(f, p) + S(g, p)$$

da cui si deduce:

$$S(f + g, p) - s(f + g, p) \leq S(f, p) - s(f, p) + S(g, p) - s(g, p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

che implica l'integrabilità di $f + g$. Inoltre la stessa disuguaglianza sulle somme integrali consente di avere anche la relazione:

$$s(f, p) + s(g, p) \leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq S(f, p) + S(g, p).$$

Per verificare che vale l'uguaglianza:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

considero ancora $\varepsilon > 0$. Per l'integrabilità di f e di g esistono $p_1, p_2 \in \mathcal{P}([a, b])$ tale che si abbia $S(f, p_1) \leq \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ ed anche $S(g, p_2) \leq \int_a^b g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$, considerando anche in questo caso $p = p_1 \cup p_2$ si ha:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq S(f, p) + S(g, p) \leq S(f, p_1) + S(g, p_2) \leq$$

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + \varepsilon$$

cioé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + \varepsilon$$

da cui si deduce la relazione:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

In modo perfettamente analogo si ottiene anche la disuguaglianza:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

che insieme alla precedente fornisce la tesi.

2)

3) Siano $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Per le proprietà 1) e 2) si ha $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ ed $f - g \in \mathcal{R}([a, b])$, inoltre si ha anche $(f + g)^2 \in \mathcal{R}([a, b])$ ed $(f - g)^2 \in \mathcal{R}([a, b])$.

Di conseguenza la tesi si ottiene osservando che risulta $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$

4) Per avere la tesi basta osservare che essendo $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ si ha anche $s(f, p) \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}([a, b])$.

5) Per dimostrare la disuguaglianza si osservi che se $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ anche $g - f \in \mathcal{R}([a, b])$ per le proprietà 1) e 2). Inoltre per la 4) si ha: $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$. Poiché si ha anche:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

si ha la tesi:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

6) La facile verifica è lasciata al lettore. $\diamond$

A volte capita di utilizzare la notazione integrale $\int_c^d f(x)dx$ di una funzione integrabile f tra due numeri c e d senza sapere se si ha $c < d$ oppure $c = d$ oppure $c > d$. Un tale integrale si dice integrale orientato. La sua definizione è data di seguito.

Definizione 7.2.1 (Integrale orientato) Siano assegnati $a, b \in \mathbb{R}$, sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e integrabile e siano assegnati $c, d \in [a, b]$.

$$\begin{cases} \int_c^d f(x)dx & \text{é l'integrale di Riemann se si ha: } c < d \\ \int_c^c f(x)dx = 0 & \text{se é: } c = d \\ \int_c^d f(x)dx =_{def} - \int_d^c f(x)dx & \text{se é: } c > d \end{cases}$$

In particolare nel primo caso l'integrale orientato è l'integrale di Riemann di f sull'intervallo $[c, d]$; nel secondo caso, cioè se si ha $c = d$, l'integrale orientato vale 0, cioè $\int_c^c f(x)dx = 0$; se infine si ha $c > d$ si definisce integrale orientato l'opposto dell'integrale di Riemann di f tra d e c , cioè $\int_c^d f(x)dx =_{def} - \int_d^c f(x)dx$.

Teorema 7.2.8 (fondamentale del calcolo integrale) Sia assegnato $X \subseteq \mathbb{R}$, X intervallo, e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Assegnato $c \in X$, si consideri anche la funzione $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione: $F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \forall x \in X$.

Tesi:

1. $\forall x \in X \quad \exists F'(x) = f(x);$
2. $\forall a, b \in X \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$
3. Sia $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in X \quad \exists G'(x) = f(x)$ allora si ha: $\forall a, b \in X \quad \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$

Dimostrazione: 1) Sia $x \in X$ e sia $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ tale che si abbia anche $x + h \in X$, occorre dimostrare che si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Utilizzando le proprietà di additività dell'integrale si ha:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \\ &= \int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Poiché f é continua, per la terza proprietà del teorema della media integrale applicato all'intervallo $[x, x+h]$ se si ha $h > 0$, o all'intervallo $[x+h, x]$ se si ha $h < 0$, esiste $\eta(h) \in [0, 1]$ tale che si abbia:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x + \eta(h)h)h.$$

Pertanto risulta anche:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x + \eta(h)h).$$

Per aver la tesi faccio ricorso alla definizione di limite.

Per questo fisso $\varepsilon > 0$ per la continuità di f in x esiste $\delta > 0$ tale che $\forall h \in \mathbb{R}$ con $x+h \in X \cap]x-\delta, x+\delta[$ si ha $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$.

Poiché $\eta(h) \in [0, 1]$ e poiché $X \cap]x-\delta, x+\delta[$ é un intervallo, si ha anche $x + \eta(h)h \in X \cap]x-\delta, x+\delta[$, pertanto si ha anche: $|f(x + \eta(h)h) - f(x)| < \varepsilon$ che fornisce la tesi.

2) Siano $a, b \in X$ e per semplicità sia anche $a < b$, si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La dimostrazione é simile, utilizzando la nozione di integrale orientato, nel caso si abbia $a > b$.

3) Sia $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su X e tale che $\forall x \in X \quad G'(x) = f(x)$ e siano $a, b \in X$ con $a < b$.

Considero la funzione $H : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $H(x) = G(x) - F(x) \quad \forall x \in X$.

Per tale funzione si ha la derivabilità su X ed inoltre si ha: $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in X$. Essendo poi X un intervallo si può utilizzare una conseguenza del teorema di Lagrange. Da essa si deduce che esiste una costante reale k tale che si abbia $H(x) = k \quad \forall x \in X$. Cioé si ha anche $G(x) = F(x) + k \quad \forall x \in X$. Ne segue che:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (G(b) - k) - (G(a) - k) = G(b) - G(a). \diamond$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale scaturisce la definizione di funzione primitiva di una funzione f .

Definizione 7.2.2 (Primitiva) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, X intervallo, e siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(g \text{ é primitiva di } f \text{ su } X) \iff_{\text{def}} (\forall x \in X \quad \exists g'(x) = f(x)).$$

Il seguente teorema dice quante sono le funzioni primitive di una funzione f definita e continua su un intervallo X di $\mathbb{R}$.

Teorema 7.2.9 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, X intervallo, sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia assegnata anche $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione primitiva di f .

Tesi: Una funzione $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ é primitiva di f se e solo se $\exists q \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $G(x) = g(x) + q \quad \forall x \in X$.

Dimostrazione: Sia G un'altra primitiva di f su X . Si consideri la funzione $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $H(x) = G(x) - g(x) \quad \forall x \in X$.

Tale funzione H é derivabile su X e si ha $H'(x) = 0 \quad \forall x \in X$. Per una conseguenza del teorema di Lagrange esiste una costante reale q tale che si abbia $H(x) = q$. Quindi si ha la tesi.

Viceversa se si ha $G(x) = g(x) + q$ allora si ha anche $G'(x) = g'(x) = f(x) \quad \forall x \in X. \diamond$

Osservazione 7.2.1 Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che se f é definita e continua su un intervallo allora ammette primitiva. Se, pur essendo X un intervallo, la funzione f non é continua allora é non detto che esista la funzione primitiva. Per questo si consideri il seguente esempio.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x) = h$ se si ha $x \leq 0$ ed $f(x) = k$ se si ha $x > 0$. La funzione data non é continua in 0 se e solo se si ha $h \neq k$. Verifico che se si ha $h \neq k$, la funzione f non ammette primitiva su $\mathbb{R}$.

Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione primitiva di f su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In tale condizione, per il teorema precedente, esistono $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $g(x) = hx + q_1$ per $x < 0$ e $g(x) = kx + q_2$ per $x > 0$.

Se si considera il caso $q_1 \neq q_2$ allora g non é continua in 0 quindi non é nemmeno derivabile in tale punto; in tal caso g non risulta primitiva di f su $\mathbb{R}$.

Se invece si ha $q_1 = q_2$ la funzione g diventa continua in 0 ma resta non derivabile in 0, nemmeno in questo caso g risulta primitiva di f su $\mathbb{R}$.

Dal teorema precedente segue che una funzione definita e continua su un intervallo ammette infinite funzioni primitive, esse però differiscono tra loro per una costante. L'insieme di tali primitive ha una definizione che si può esplicitare come segue.

Definizione 7.2.3 (Integrale indefinito) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, X intervallo, e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Si definisce integrale indefinito di f su X , e si indica con $\int f(x)dx$, l'insieme di tutte le primitive di f .

In simboli si ha:

$$\int f(x)dx =_{\text{def}} \{g : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in X \quad \exists g'(x) = f(x)\}.$$

Dalla definizione precedente segue una determinante differenza tra l'integrale definito e l'integrale indefinito di una funzione f su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.

Infatti il primo, per definizione, è un numero reale, il secondo, invece, sempre per definizione, è un insieme di funzioni.

Al solo scopo di non appesantire la terminologia, nella pratica, l'integrale indefinito di una funzione si scrive nella forma seguente:

$$\int f(x)dx = g(x) + c$$

con g una primitiva di f e c una qualunque costante reale.

CAPITOLO 8

SERIE NUMERICHE

In questo capitolo esamineremo alcune definizioni e proprietà riferite alle serie numeriche. Esamineremo soprattutto le serie di numeri reali. Molte delle proprietà che saranno esaminate sono trasferibili con i dovuti aggiustamenti, ad esempio, anche alle serie di numeri complessi.

8.1 Serie numeriche

La nozione di serie numerica è strettamente collegata a quella di successione numerica. Molte nozioni esaminate per le successioni si trasferiscono in modo molto immediato alle serie. Come noto una successione di numeri reali f è una funzione reale definita sull'insieme dei numeri naturali, cioè: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Normalmente, però, una successione si indica in un forma più intuitiva; posto $x_n = f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ la successione, cioè la funzione, si indica in uno dei modi seguenti: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oppure $(x_n)_n$ o ancora (x_n) .

Invece con x_n si indica, appunto, il valore che la successione data assume in corrispondenza dell'ascissa n .

Infine il simbolo $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ indica l'insieme immagine della successione data, cioè indica l'insieme $f(\mathbb{N})$.

Nel seguito saranno utilizzate le notazioni appena descritte.

Definizione 8.1.1 (Serie numerica) *Si definisce serie numerica individuata dalla successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assegnata la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita nel modo seguente:*

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha: $s_1 = x_1, \ s_2 = x_1 + x_2, \ s_3 = x_1 + x_2 + x_3, \ \dots, \ s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \ \dots$

Di una serie si può dare anche una definizione di tipo ricorrente ponendo

$$\begin{cases} s_1 = x_1 \\ s_n = s_{n-1} + x_n \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

A volte il termine s_n si chiama la somma parziale della serie, e la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si denota come la successione delle somme parziali.

Di una serie è importante determinare l'esistenza o meno del limite. Per questo motivo si ha la seguente definizione.

Definizione 8.1.2 (convergenza di una serie numerica) Sia $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una serie numerica.

Si dice che $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se solo se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in \mathbb{R}$. In tal caso il valore del limite trovato prende il nome di somma della serie data.

Si dice che $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge se solo se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \notin \mathbb{R}$. In tal caso si dice che la serie diverge positivamente se il limite é $+\infty$, mentre si dice che diverge negativamente se il limite é $-\infty$.

In uno dei casi appena esposti si dice che la serie é regolare.

Infine si dice che $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non é regolare se e solo se non esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

Nel seguito si usa sintetizzare la precedente definizione ricorrendo ad una terminologia sicuramente imprecisa ma fortemente intuitiva.

Una serie viene di solito denotata, con ovvio abuso, con il simbolo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

In esso é citata la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assegnata; é ricordata, attraverso il simbolo di somma, la definizione di $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$; é fatto riferimento alla operazione di limite attraverso la citazione del simbolo $+\infty$; infine la notazione inferiore della somma ricorda quali termini della successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ data concorrono alla determinazione della eventuale somma della serie.

Da questa considerazione segue che al suddetto simbolo si può attribuire il valore del limite quando la serie data converge, oppure il valore $+\infty$ o il valore $-\infty$ nel caso di serie divergente e invece non ha significato nel caso che la serie data non é regolare.

Studiare allora una serie significa vedere se tale simbolo ha un significato oppure no.

Considero ora alcuni esempi di serie. Di esse sarà esaminato il comportamento.

Esempio 8.1.1 (La serie telescopica) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica e sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

definita dalle relazioni $x_n = a_n - a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ si dice serie telescopica.

La successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali é data da:

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + \dots + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi il comportamento della serie é determinato dal comportamento della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio 8.1.2 (La serie di Mengoli, e qualche estensione) 1. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

si dice serie di Mengoli.

Per essa si ha: $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, di conseguenza risulta anche $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$;

pertanto la serie converge e si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

2. Assegnato $\beta > -1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$ si dice serie di Mengoli generalizzata.

Per essa si ha: $x_n = \frac{1}{(n+\beta)(n+\beta+1)} = \frac{1}{n+\beta} - \frac{1}{n+\beta+1}$, di conseguenza risulta anche $s_n = 1 - \frac{1}{n+\beta+1}$; pertanto la serie converge e si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{n+\beta+1} \right) = \frac{1}{\beta+1}$

3. Assegnati $\beta > -1$ e $\gamma > 0$, si consideri: $x_n = \frac{1}{(n+\beta)^\gamma} - \frac{1}{(n+\beta+1)^\gamma}$ e la relativa serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+\beta)^\gamma} - \frac{1}{(n+\beta+1)^\gamma} \right)$$

di conseguenza risulta anche $s_n = \frac{1}{(1+\beta)^\gamma} - \frac{1}{(n+\beta+1)^\gamma}$; pertanto la serie converge e si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1+\beta)^\gamma} - \frac{1}{(n+\beta+1)^\gamma} \right) = \frac{1}{(1+\beta)^\gamma}$$

Esempio 8.1.3 (La serie geometrica) Sia $q \in \mathbb{R}$ e sia $x_n = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ prende il nome di serie geometrica di ragione q . Si vuole verificare che essa è irregolare se risulta $q \leq -1$, converge se si ha $-1 < q < 1$, diverge positivamente se si ha $q \geq 1$.

Per fare questo sia assegnato n e si consideri la somma parziale

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \begin{cases} n & \text{se si ha: } q = 1 \\ q \frac{1-q^n}{1-q} & \text{se si ha: } q \neq 1. \end{cases}$$

Dalla formula si deduce che per $q = 1$ si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, quindi la serie diverge positivamente.

Se invece si ha $q \neq 1$, il comportamento dipende esclusivamente dal limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$.

Per esso si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} \text{\textit{A}} & \text{se si ha: } q \leq -1 \\ 0 & \text{se si ha: } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se si ha: } q > 1. \end{cases}$$

Di conseguenza si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \text{\textit{A}} & \text{se si ha: } q \leq -1 \\ \frac{q}{1-q} & \text{se si ha: } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se si ha: } q > 1. \end{cases}$$

In conclusione si può dire che la serie geometrica di ragione q , non solo converge se si ha $-1 < q < 1$, ma che la somma della serie, cioè il valore L , di cui si parla nella definizione ha anche una espressione.

Cioé si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \forall q \in]-1, 1[.$$

Essa é suscettibile di varie estensioni. Ne considero alcune.

Sommando ad ambo i termini 1 si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \forall q \in]-1, 1[.$$

Ponendo, poi ad esempio, al posto di n in termine $2k$ con $k \in \mathbb{N}$ si ottiene la somma delle potenze di esponente pari di q :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} = \frac{q^2}{1-q^2} \quad \forall q \in]-1, 1[.$$

Ponendo invece sempre al posto di n in termine $2k-1$ con $k \in \mathbb{N}$ si ottiene la somma delle potenze di esponente dispari di q :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} = \frac{q}{1-q^2} \quad \forall q \in]-1, 1[.$$

Evidentemente la somma delle due serie fornisce la serie di tutte le potenze, pari e dispari, di q .

Esempio 8.1.4 (La serie armonica) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $x_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ prende il nome di serie armonica di esponente α .

Si vuole verificare che essa é regolare $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e che diverge se risulta $\alpha \leq 1$ e converge se si ha $\alpha > 1$.

$$\text{In tal caso si ha anche: } \frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad \forall \alpha > 1$$

Per avere la tesi sia $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^2 \frac{1}{t^\alpha} dt + \int_2^3 \frac{1}{t^\alpha} dt + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt = 1 + \int_1^n t^{-\alpha} dt.$$

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} &\geq \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^\alpha} dt + \int_1^2 \frac{1}{(t+1)^\alpha} dt + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{(t+1)^\alpha} dt \\ &= \int_0^n (t+1)^{-\alpha} dt. \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\int_0^n (t+1)^{-\alpha} dt \leq s_n \leq 1 + \int_1^n t^{-\alpha} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se si ha $\alpha \neq 1$, integrando, si ha:

$$\frac{1}{(1-\alpha)(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \leq s_n \leq 1 + \frac{1}{(1-\alpha)(n^{\alpha-1})} - \frac{1}{1-\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se poi é anche $\alpha > 1$, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, e osservato che $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é strettamente crescente, si ha:

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

da cui si deduce che la serie converge e che la somma della serie é compresa nell'intervallo $[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}]$.

Se invece risulta $\alpha < 1$, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

da cui si deduce che la serie diverge positivamente.

Infine se si ha: $\alpha = 1$,

$$\int_0^n \frac{1}{t+1} dt \leq s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

integrando si ha:

$$\log(n+1) \leq s_n \leq 1 + \log n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui si deduce

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

che dice che la serie diverge positivamente. $\diamond$

Di seguito si considera una condizione necessaria che consente di esaminare il comportamento di una serie convergente.

Teorema 8.1.1 (Condizione necessaria di convergenza)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge} \implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Dimostrazione: Poiché la serie converge allora $\exists L \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = L$, inoltre, essendo $(s_{n-1})_{n \geq 2}$ una sottosuccessione di $(s_n)_{n \geq 1}$, si ha anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = L$.

Utilizzando ora la definizione per ricorrenza si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = L - L = 0. \diamond$$

La condizione appena dimostrata non é sufficiente. Infatti ci sono serie il cui termine generale é infinitesimo ma la serie diverge. Si consideri infatti la serie armonica di esponente $\alpha = 1$ che diverge ma il cui termine generale $x_n = \frac{1}{n}$ é infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$.

Teorema 8.1.2 (Criterio di Cauchy)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ converge} \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \quad \forall n > m \text{ e } \forall p \in \mathbb{N} \implies \left| \sum_{j=1}^p x_{n+j} \right| < \varepsilon. \right)$$

È molto utile esaminare alcune classi di serie che si differenziano tra loro per il segno dei termini della serie. In particolare saranno prese in considerazione le serie a termini di segno costante, quelle i cui termini hanno segno alternato ed infine quelle i cui termini non hanno un segno predefinito. Le definizioni formali saranno date al momento opportuno.

8.2 Serie numeriche con termini segno costante

In questo paragrafo saranno esposte alcune proprietà delle serie a termini di segno costante.

Definizione 8.2.1 (serie numeriche con termini di segno costante) Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ si dice a segno costante se si ha: $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ oppure $x_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esamino ora alcune condizioni sufficienti per le serie a termini di segno costante.

Teorema 8.2.1 (Criterio di regolarità) Sia $x_n \in \mathbb{R}$ con $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tesi: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ è regolare, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Dimostrazione: La tesi si ricava facilmente osservando che, essendo $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, si ha anche $s_n \leq s_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Il teorema sul limite per le funzioni monotone fornisce la tesi. $\diamond$

Teorema 8.2.2 (Criterio del confronto) Siano $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ con $x_n \geq 0$ ed $y_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si supponga inoltre che $\exists m \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > m \quad x_n \leq y_n$.

Tesi:

1. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.
2. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ diverge.

Dimostrazione: Posto $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ e $t_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 $\forall n \geq m$ si ha:

$$s_n = \sum_{j=1}^m x_j + \sum_{j=m+1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^m x_j + \sum_{j=m+1}^n y_j =$$

$$\sum_{j=1}^m x_j - \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^m (x_j - y_j) + t_n.$$

Per il criterio di regolarità $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ ed $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$ e, per il criterio del confronto per i limiti, si ha anche

$$x_1 \leq s \leq \sum_{j=1}^m (x_j - y_j) + t.$$

Se poi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge si ha $t \in \mathbb{R}$ e quindi si ha anche $s \in \mathbb{R}$ da cui si deduce che anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.

Se invece la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge si ha $s = +\infty$, allora si ha anche $t = +\infty$ che dice che anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ diverge. $\diamond$

Del criterio appena considerato é possibile dare la seguente versione asintotica.

Teorema 8.2.3 (Criterio asintotico del confronto) *Siano $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ con $x_n \geq 0$ ed $y_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Suppongo anche che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = k$.*

Tesi:

1. *Se $k \in]0, +\infty[$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge se e solo se anche $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge.*
2. *Se $k = 0$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.*
3. *Se $k = +\infty$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ diverge.*

Dimostrazione: 1) Considerato $\varepsilon = \frac{k}{2}$, per la definizione di limite esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > m$ si abbia:

$$\frac{k}{2} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{3k}{2}$$

cioé

$$\frac{k}{2} y_n \leq x_n \leq \frac{3k}{2} y_n.$$

Il criterio del confronto fornisce la tesi.

2) Preso $\varepsilon = 1$, per la definizione di limite esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che si abbia: $\frac{x_n}{y_n} \leq 1 \quad \forall n > m$, cioè $x_n \leq y_n \quad \forall n > m$. La tesi si ottiene utilizzando il criterio del confronto.

3) Preso $\varepsilon = 1$, per la definizione di limite esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > m$ si abbia: $\frac{x_n}{y_n} \geq 1 \quad \forall n > m$, cioè $x_n \geq y_n \quad \forall n > m$. La tesi si ottiene utilizzando il criterio del confronto. $\diamond$

Teorema 8.2.4 (Criterio di convergenza) *Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{N}$ e tale che:*

1. $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tesi: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$

Dimostrazione: Supponiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converga. Quindi $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \in \mathbb{R}$.

Considero poi $m \in \mathbb{N}$ ed $n = 2^m$ per il teorema sul limite delle funzioni composte si ha anche:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2^m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

Provo ora che vale la disuguaglianza:

$$s_{2^m} \geq \sum_{k=1}^m 2^{k-1} x_{2^k} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Infatti utilizzando l'ipotesi di monotonia decrescente della successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si ha:

$$s_{2^m} = x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots + (x_{2^{m-1}+1} + x_{2^{m-1}+2} + \dots + x_{2^m-1} + x_{2^m}) \geq$$

$$x_1 + x_2 + (x_4 + x_4) + (x_8 + x_8 + x_8 + x_8) + \dots + (x_{2^m} + x_{2^m} + \dots + x_{2^m} + x_{2^m}) =$$

$$x_1 + x_2 + (2x_4) + (2^2 x_8) + \dots + (2^{m-1} x_{2^m}) = x_1 + \sum_{k=1}^m 2^{k-1} x_{2^k} \geq \sum_{k=1}^m 2^{k-1} x_{2^k}.$$

Ne segue che:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m 2^{k-1} x_{2^k} \in \mathbb{R}.$$

E quindi si ha anche:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m 2^k x_{2^k} = 2 \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m 2^{k-1} x_{2^k} \in \mathbb{R}.$$

Cioé la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ converge.

Viceversa si supponga che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ converga. Cioé: $\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m 2^k x_{2^k} \in \mathbb{R}$

In tal caso utilizzando sempre la proprietà di monotonia decrescente della successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si ha la seguente disuguaglianza:

$$s_{2^m} \leq x_1 + \sum_{k=1}^{m-1} 2^k x_{2^k} + x_{2^m} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Infatti risulta:

$$s_{2^m} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + \dots + x_{2^{m-1}+1} + x_{2^{m-1}+2} + \dots + x_{2^m-1} + x_{2^m} =$$

$$x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + (x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) +$$

$$\dots + (x_{2^{m-1}} + x_{2^{m-1}+1} + x_{2^{m-1}+2} + \dots + x_{2^{m-1}+2^{m-1}-1}) + x_{2^m} \leq$$

$$x_1 + (x_2 + x_2) + (x_4 + x_4 + x_4 + x_4) + (x_8 + x_8 + x_8 + x_8 + x_8 + x_8 + x_8 + x_8) +$$

$$\dots + (x_{2^{m-1}} + x_{2^{m-1}} + x_{2^{m-1}} + \dots + x_{2^{m-1}}) + x_{2^m} =$$

$$x_1 + (2x_2) + (2^2x_4) + (2^3x_8) + \dots + (2^{m-1}x_{2^{m-1}}) + x_{2^m} = x_1 + \sum_{k=1}^{m-1} 2^k x_{2^k} + x_{2^m}.$$

Dall'ipotesi risulta quindi: $\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{m-1} 2^k x_{2^k} \in \mathbb{R}$ e quindi anche $\lim_{m \rightarrow +\infty} 2^m x_{2^m} = 0$ da cui si deduce che é anche: $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{2^m} = 0$. Pertanto si ha anche:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2^m} \in \mathbb{R}.$$

Pertanto la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha anchessa limite finito perché é monotona crescente e poiché la sua sottosuccessione $(s_{2^m})_{m \in \mathbb{N}}$ ha limite finito. $\diamond$

É possibile ora dare alcuni criteri di convergenza facendo ricorso ad alcune operazioni sui suoi termini come la radice o il rapporto. Entrambi sono enunciati considerando due versioni: una utilizza le disuguaglianze e l'altra considera l'operazione di limite. Questa seconda versione viene citata di solito come versione asintotica.

Teorema 8.2.5 (Criterio del rapporto) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$ e con $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tesi:

1. Se $\exists k \in [0, 1[$ ed $\exists m$ tale che $\forall n > m \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq k$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.
2. Se $\exists m$ tale che $\forall n > m \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione: Si osservi intanto che per l'ipotesi di segno costante la serie data é regolare.

Per verificare la 1) osservo che, operando per induzione su n , si ha:

$$x_n \leq k^{n-m} x_m \quad \forall n > m.$$

Infatti se si ha $n = m + 1$ la disuguaglianza é ovvia.

Supposto poi che essa sia vera per un certo n é facile verificarla per $n + 1$, si ha:

$$x_{n+1} \leq k x_n \leq k k^{n-m} x_m = k^{1+n-m} x_m.$$

Alla disuguaglianza dimostrata si applica ora il criterio del confronto e si ottiene la tesi.

Per verificare la 2) basta osservare che la successione $(x_n)_n$ é definitivamente crescente. Quindi, per il teorema sul limite delle funzioni monotonesi ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup \{x_n : n > m\} > 0,$$

quindi la serie diverge. $\diamond$

Teorema 8.2.6 (Criterio asintotico del rapporto) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$ e con $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e si supponga che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = k$.

Tesi:

1. Se $k < 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.
2. Se $k > 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione: Sia $k \in [0, +\infty[$, dalla definizione di limite si deduce che fissato $\varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > m$ si ha:

$$k - \varepsilon \leq \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq k + \varepsilon.$$

Ora se si ha anche $k < 1$, si consideri ε tale che si abbia anche $k + \varepsilon < 1$, vale la seguente disuguaglianza:

$$0 < x_n \leq (k + \varepsilon)^{n-m} x_m \quad \forall n > m.$$

In questo modo il termine generale x_n della serie data é definitivamente maggiorato dal termine generale di una serie convergente perché risulta prodotto tra la costante x_m ed una serie geometrica di ragione minore di 1.

Applicando allora il criterio del confronto si ha la tesi.

Se invece si ha $k > 1$ si consideri ε tale che si abbia anche $k - \varepsilon > 1$.

In tale situazione vale la seguente disuguaglianza: $1 < k - \varepsilon \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \forall n > m$ da cui si deduce: $x_n < x_{n+1} \quad \forall n > m$ e quindi la serie diverge.

Infine si ha $k = +\infty$, sempre per la definizione di limite, considerato $\varepsilon = 1$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > m$ si ha: $1 \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Quindi se si ha $k > 1$ la successione $(x_n)_n$ non é infinitesima. Infatti, per il teorema del limite per la funzioni monotone, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup \{x_n : n > m\} > 0,$$

quindi la serie diverge. $\diamond$

Osservazione 8.2.1 Se si ha $k = 1$, non é determinato il comportamento della serie, cioè può accadere che la serie converga o diverga.

A tale proposito si può considerare la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Il criterio asintotico del rapporto asintotico fornisce il risultato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mentre é stato dimostrato in precedenza che la serie converge se si ha $\alpha > 1$ e diverge se invece si ha $\alpha \leq 1$. $\diamond$

Teorema 8.2.7 (Criterio della radice) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$ e con $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tesi:

1. Se $\exists k \in [0, 1[$ ed $\exists m$ tale che $\forall n > m \quad \sqrt[n]{x_n} \leq k$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.
2. Se $\exists m$ tale che $\forall n > m \quad \sqrt[n]{x_n} \geq 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione: Si osservi intanto che per l'ipotesi di segno costante la serie data é regolare.

Per verificare la 1) osservo che $\exists k \in [0, 1[$ ed $\exists m$ tale che $\forall n > m \quad \sqrt[n]{x_n} \leq k$.

Cioé $\forall n > m \quad x_n \leq k^n$.

Poiché il termine maggiorante é il termine generale di una serie geometrica convergente, per il criterio del confronto si ha la tesi.

Per provare la 2) si osservi che dall'ipotesi, passando alla potenza di esponente n di ambo i termini, si deduce che $\forall n > m \quad x_n \geq 1$. Quindi la successione $(x_n)_n$ non risulta infinitesima e pertanto la serie, essendo regolare e non essendo convergente, é divergente positivamente. $\diamond$

Teorema 8.2.8 (Criterio asintotico della radice) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$ e con $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e si supponga che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = k$.

Tesi:

1. Se é $k < 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.
2. Se é $k > 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge positivamente.

Dimostrazione: Per verificare la 1) fisso $\varepsilon > 0$ tale che si abbia $k + \varepsilon < 1$, per definizione di limite esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\sqrt[n]{x_n} < (k + \varepsilon) \quad \forall n > m$, e quindi $x_n < (k + \varepsilon)^n \quad \forall n > m$. Per il criterio del confronto si ha la tesi.

Per dimostrare la 2) supposto che si abbia anche $k \in \mathbb{R}$ fisso $\varepsilon > 0$ tale che si abbia $k - \varepsilon > 1$. Per definizione di limite esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\sqrt[n]{x_n} > (k - \varepsilon) \quad \forall n > m$, e quindi $x_n > (k - \varepsilon)^n \quad \forall n > m$. Da essa si deduce che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ che dice che la serie diverge. Se infine é $k = +\infty$ in corrispondenza di $\varepsilon = 2$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\sqrt[n]{x_n} > 2 \quad \forall n > m$, e quindi $x_n > 2^n \quad \forall n > m$. Da essa si deduce che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ che dice che la serie diverge.

$\diamond$

La seguente osservazione consente di confrontare il criterio del rapporto con il criterio della radice.

Osservazione 8.2.2 Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é una successione con $x_n \in \mathbb{R}$ ed $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tale che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ allora si ha anche: $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Per ottenere la dimostrazione, che sar  riportata dopo, consideriamo i seguenti teoremi di Cesaro sulle medie.

Si noti che l'implicazione inversa non   vera.

Infatti per la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n+(-1)^n}$ si ha:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{-(n+1)+(-1)^{n+1}}}{2^{-n+(-1)^n}} = 2^{-(n+1)+(-1)^{n+1}+n-(-1)^n} = 2^{-1+2(-1)^{n+1}} = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{   dispari} \\ \frac{1}{8} & \text{se } n \text{   pari} \end{cases}$$

Teorema 8.2.9 (di Cesaro sulle medie aritmetiche) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $a_n \in \mathbb{R}$ e si supponga che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = k$.

Tesi: $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j = k$.

Dimostrazione: Sia $k \in \mathbb{R}$, per avere la tesi considero $\varepsilon > 0$.

Per ipotesi esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > m$ si abbia $-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - k < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sommando ora sull'indice $j = m+1, m+2, \dots, n$ si ha:

$$-(n-m)\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=m+1}^n (a_j - k) < (n-m)\frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} -(n-m)\frac{\varepsilon}{2} &< \sum_{j=m+1}^n a_j - (n-m)k < (n-m)\frac{\varepsilon}{2} \\ -(n-m)\frac{\varepsilon}{2} &< -\sum_{j=1}^m a_j + mk + \sum_{j=1}^n a_j - nk < (n-m)\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} -(n-m)\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^m a_j - mk &< \sum_{j=1}^n a_j - nk < +\sum_{j=1}^m a_j - mk + (n-m)\frac{\varepsilon}{2} \\ -\frac{n-m}{n}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j - mk \right) &< \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j - k < \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j - mk \right) + \frac{n-m}{n}\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Cio :

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j - mk \right) < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j - k < \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j - mk \right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora si osservi che il numero m dipende da ε ed   fissato. Considero ora un numero naturale r tale che si abbia

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j - mk \right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > r.$$

Considerando ora $q = \max \{m, r\}$ si ha

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j - k < \varepsilon \quad \forall n > q$$

che fornisce la tesi.

Considero ora il caso $k = +\infty$, per avere la tesi considero $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > m$ si abbia $a_n > 2\varepsilon$.

Sommando ora sull'indice $j = m+1, m+2, \dots, n$ si ha:

$$2(n-m)\varepsilon < \sum_{j=m+1}^n a_j$$

e quindi

$$2(n-m)\varepsilon < -\sum_{j=1}^m a_j + \sum_{j=1}^n a_j$$

pertanto

$$2(n-m)\varepsilon + \sum_{j=1}^m a_j < \sum_{j=1}^n a_j$$

$$2\frac{n-m}{n}\varepsilon + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) < \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \right).$$

Ora si osservi che il numero m dipende da ε ed é fissato. Considero ora un numero naturale r tale che si abbia

$$\varepsilon < 2\frac{n-m}{n}\varepsilon + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m a_j \right) \quad \forall n > r$$

Considerando ora $q = \max \{m, r\}$ si ha

$$\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \quad \forall n > q$$

che fornisce la tesi.

Il caso $k = -\infty$ si può esaminare in modo analogo al caso $k = +\infty$. $\diamond$

Teorema 8.2.10 (di Cesaro sulle medie geometriche) Sia $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $b_n \in \mathbb{R}$ e con $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e si supponga che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = k$.

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n b_j} = k.$$

Dimostrazione: Per avere la tesi si può utilizzare il precedente teorema sulle medie aritmetiche. Infatti si ha:

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n b_j} = \exp \left(\log \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n b_j} \right) = \exp \left(\frac{1}{n} \log \prod_{j=1}^n b_j \right) = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log b_j \right)$$

Per ipotesi si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log b_n = \log k$, evidentemente se $k = 0$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log b_n = -\infty$.
Quindi per il teorema sulle medie aritmetiche si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log a_j = \log k.$$

Pertanto risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n b_j} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\exp \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log b_j \right)} = \exp \log k = k. \diamond$$

8.3 Serie numeriche con termini di segno alterno.

In questo paragrafo saranno espresse alcune proprietà delle serie a termini di segno alterno la cui definizione è riportata di seguito.

Definizione 8.3.1 (Serie numeriche con termini di segno alterno) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$ e con $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La serie di seguito riportata: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n$ si dice con termini di segno alterno. Il primo termine è positivo.

La serie di seguito riportata: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x_n$ se si considera il caso in cui il primo termine è negativo.

Per le serie a segno alterno vale il seguente risultato.

Teorema 8.3.1 (Criterio di Leibnitz) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sia

1. $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Tesi: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n$ converge, cioè $\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} x_n = S \in \mathbb{R}$ e si ha:

$$\left| S - \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} x_n \right| \leq x_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione: Per avere la tesi occorre considerare le due sottosuccessioni $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ed $(s_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ rispettivamente dei termini di posto pari e di posto dispari della successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali.

Verifico che la prima è monotona crescente e che la seconda è monotona decrescente.

Infatti $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j+1} x_j = (-1)^{1+1} x_1 - (-1)^{2+1} x_2 + (-1)^{3+1} x_3 - \dots + (-1)^{2k+1} x_{2k} =$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k-1} - x_{2k} \leq$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2k} + x_{2k+1} - x_{2k+2} = \sum_{j=1}^{2k+2} (-1)^{j+1} x_j = s_{2(k+1)}$$

ed

$$s_{2k-1} = \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^{j+1} x_j = x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k-1} \geq$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k-1} - x_{2k} + x_{2k+1} = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j+1} x_j = s_{2k+1}.$$

Si ha allora, per il teorema di esistenza del limite per le funzioni monotone,:

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} = \sup \{s_{2k} : k \in \mathbb{N}\} = S_1 \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = \inf \{s_{2k+1} : k \in \mathbb{N}\} = S_2.$$

Poiché si ha anche $s_{2k+1} = s_{2k} + x_{2k+1}$, per le ipotesi risulta:

$$S_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} + \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = S_1 + 0 = S_1$$

Posto poi $S_2 = S_1 = S$, si tratta di verificare che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$.

Per questo fissato $\varepsilon > 0$ esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$ con $k > p$ si ha: $S - \varepsilon < s_{2k} < S + \varepsilon$ ed esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$ con $k > q$ si ha: $S - \varepsilon < s_{2k-1} < S + \varepsilon$; preso ora $r = \max \{p, q\}$ e considerato $m = 2r + 1$ per ogni $n > m$ si ha: $S - \varepsilon < s_n < S + \varepsilon$ che fornisce la tesi.

La disuguaglianza della tesi si verifica osservando che si ha:

$$s_{2k} \leq S \leq s_{2k+1} = s_{2k} + x_{2k+1}$$

quindi:

$$0 \leq S - s_{2k} \leq x_{2k+1};$$

inoltre si ha anche:

$$s_{2k-1} \geq S \geq s_{2k} = s_{2k-1} - x_{2k}$$

e pertanto si ha:

$$0 \leq s_{2k-1} - S \leq x_{2k}. \diamond$$

8.4 Serie numeriche con termini di segno qualunque

Per tali serie non é assegnata una regola sul segno dei termini x_n che la formano. Per tali serie oltre alla usuale definizione di convergenza già vista, che in questo caso si denota come convergenza semplice, si può dare la seguente definizione di convergenza che si dice assoluta.

Definizione 8.4.1 (Convergenza assoluta) Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$. Si dice che converge assolutamente se e solo se converge la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.

A tale tipo di convergenza si possono applicare tutti criteri di convergenza delle serie a termini non negativi. Vale anche il seguente criterio di confronto tra la convergenza assoluta e quella semplice.

Teorema 8.4.1 Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in \mathbb{R}$.

Se converge la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ allora converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Dimostrazione:

Non vale l'implicazione inversa, ci sono, cioè serie che convergono semplicemente ma non convergono assolutamente. Si consideri infatti la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, essa converge per il criterio di Leibnitz. Essa però non converge assolutamente perché la serie dei valori assoluti costituisce la serie armonica di esponente 1, cioè si ha: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

CAPITOLO 9

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Nei capitoli precedenti sono state considerate le funzioni reali di una variabile reale, in questo saranno considerate quelle di piú variabili.

Per maggiore precisione, assegnato $n \in \mathbb{N}$, si consideri l'insieme $\mathbb{R}^n$ prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per se stesso n -volte, cioè l'insieme $\mathbb{R}^n =_{def} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

I suoi elementi x sono le n -uple di numeri reali: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Le funzioni f che saranno considerate sono definite su un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ ed hanno valori nell'insieme $\mathbb{R}$.

Sarà però sviluppato prima il caso $n = 2$, cioè saranno considerate prima le funzioni reali di due variabili reali.

9.1 Limite di una funzioni di due variabili.

In questo paragrafo si considerano le nozioni collegate al limite di una funzione di due variabili.

Definizione 9.1.1 (Distanza euclidea in $\mathbb{R}^2$) Si definisce metrica euclidea in $\mathbb{R}^2$ la funzione:

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad d((x, y), (u, v)) =_{def} \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 9.1.1 La metrica euclidea d in $\mathbb{R}^2$ verifica le seguenti relazioni:

1. $d((x, y), (u, v)) \geq 0 \quad \forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad e \quad d((x, y), (u, v)) = 0 \iff (x = u \text{ ed } y = v),$
2. $d((x, y), (u, v)) = d((u, v), (x, y))$
3. $d((x, y), (u, v)) \leq d((x, y), (z, t)) + d((z, t), (u, v)) \quad \forall (x, y), (u, v), (z, t) \in \mathbb{R}^2$

Definizione 9.1.2 (Cerchio aperto) Siano assegnati un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ ed un numero reale $a > 0$.

Si definisce cerchio aperto di centro (x_o, y_o) e raggio a l'insieme

$$C((x_o, y_o), a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < a^2\}.$$

Definizione 9.1.3 (Intorno di un punto) Siano assegnati $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ ed un sottoinsieme I di $\mathbb{R}^2$, cioè $I \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$(I \text{ é un intorno di } (x_o, y_o)) \iff_{def} (\exists a > 0 : C((x_o, y_o), a) \subseteq I).$$

Sarà indicato con $\mathcal{I}(x_o, y_o)$ l'insieme di tutti gli intorni del punto (x_o, y_o) . A tale insieme appartengono ovviamente i cerchi di centro (x_o, y_o) , anche l'insieme $\mathbb{R}^2$ é un intorno.

Definizione 9.1.4 (Punto di accumulazione) Siano $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ ed $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$((x_o, y_o) \text{ si dice punto di accumulazione per } X) \iff_{def} (\forall I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) \text{ si ha: } I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} \neq \emptyset).$$

Indicheremo con $\mathcal{D}(X)$ l'insieme dei punti di accumulazione di X , tale insieme sarà a volte chiamato il derivato di X . Se (x_o, y_o) non è punto di accumulazione per X si dice isolato rispetto ad X ; quindi è possibile dare la seguente:

Definizione 9.1.5 (Punto isolato) Siano $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ ed $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$((x_o, y_o) \text{ si dice isolato rispetto ad } X) \iff_{def} (\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} = \emptyset).$$

Definizione 9.1.6 (Limite) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ con $X \neq \emptyset$, sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$ ed $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell \right) \iff_{def} (\forall J \in \mathcal{I}(\ell) \quad \exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in (I \cap X) \setminus \{(x_o, y_o)\} \Rightarrow f(x, y) \in J).$$

Come per le funzioni di una variabile si hanno i risultati di unicità del limite, del confronto, della permanenza del segno, delle operazioni, delle funzioni composte, delle tre funzioni. Di seguito ci limitiamo ad esporre solo l'enunciato, la dimostrazione si ottiene facilmente tenendo presente quella valida per le funzioni di una variabile.

Teorema 9.1.2 (Unicità del limite.) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$.

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell \text{ ed } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = m$$

Tesi: $\ell = m$.

Teorema 9.1.3 (Confronto) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Supponiamo che } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell \text{ ed } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y) = m.$$

Tesi:

$$1. \ell < m \implies \exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} f(x, y) < g(x, y);$$

$$2. \exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} f(x, y) \leq g(x, y) \implies \ell \leq m.$$

Teorema 9.1.4 (Permanenza del segno) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell.$$

Tesi:

1. $\ell < 0 \implies \exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} f(x, y) < 0.$
2. $\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} f(x, y) \leq 0 \implies \ell \leq 0.$

Teorema 9.1.5 (Operazioni) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo che $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell$ e che $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y) = m.$

Tesi:

1. $\exists \ell + m \implies \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} (f(x, y) + g(x, y)) = \ell + m.$
2. $\exists \ell m \implies \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} (f(x, y)g(x, y)) = \ell m.$
3. $\exists \frac{\ell}{m} \implies \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\ell}{m}.$

Teorema 9.1.6 (delle tre funzioni) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$ con $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$ ed $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che:

1. $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(x, y) = \ell, \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} h(x, y) = \ell;$
2. $\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y).$

Tesi: $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell.$

Teorema 9.1.7 (limite delle funzioni composte) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(X)$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e siano assegnati anche $Z \subseteq \mathbb{R}$ con $f(X) \subseteq Z$ e $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

Suppongo che:

1. $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = \ell,$
2. $\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} f(x, y) \neq \ell.$
3. $\ell \in \mathcal{D}(Z)$ ed $\exists \lim_{z \rightarrow \ell} g(z) = m.$

Tesi: $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} g(f(x, y)) = m.$

9.2 Funzioni continue.

Definizione 9.2.1 (continuitá) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. $(f \text{ è continua in } (x_o, y_o)) \iff_{def} \begin{cases} ((x_o, y_o) \in X \setminus \mathcal{D}(X)) \\ \text{oppure} \\ ((x_o, y_o) \in X \cap \mathcal{D}(X) \implies \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = f(x_o, y_o)) \end{cases}$
2. $(f \text{ è continua su } X) \iff_{def} (\forall (x_o, y_o) \in X \text{ } f \text{ è continua in } (x_o, y_o)).$

Utilizzando il teorema sulle operazioni si ricava che la funzione somma, la funzione prodotto, la funzione rapporto di funzioni continue è ancora continua. Utilizzando invece il teorema sul limite di una funzione composta si ricava che anche la funzione composta di funzioni continue è ancora continua.

Anche per le funzioni di due variabili è vero un risultato di esistenza di punti di massimo e di minimo, teorema di Weierstrass. Per poterlo enunciare occorre però prima dare alcune definizioni.

Definizione 9.2.2 (insieme limitato) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$,

$$(X \text{ si dice limitato}) \iff_{def} (\exists a > 0 \text{ tale che } X \subseteq C((0,0), a)).$$

Definizione 9.2.3 (punto interno ad un insieme) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, e sia $(x_o, y_o) \in A$.

$$((x_o, y_o) \text{ si dice interno ad } A) \iff_{def} (\exists a > 0 \text{ tale che } C((x_o, y_o), a) \subseteq A).$$

Indicheremo con A° l'insieme dei punti interni dell'insieme A

Definizione 9.2.4 (insieme aperto) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$,

$$(A \text{ si dice aperto}) \iff_{def} (A = A^\circ).$$

Un esempio di insieme aperto è un qualunque cerchio aperto $C((x_o, y_o), a)$ di centro (x_o, y_o) e raggio $a > 0$.

Definizione 9.2.5 (insieme chiuso) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$,

$$(X \text{ si dice chiuso}) \iff_{def} (\mathbb{R}^2 \setminus X \text{ è aperto}).$$

Un esempio di insieme chiuso è un qualunque cerchio chiuso che è definito come segue $\overline{C}((x_o, y_o), a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 \leq a^2\}$.

Teorema 9.2.1 (di WEIERSTRASS) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Suppongo che:

1. X chiuso e limitato,
2. f continua su X ,

Tesi: $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X : f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) \quad \forall (x, y) \in X$.

Il punto (x_1, y_1) si dice punto di minimo assoluto, mentre il punto (x_2, y_2) si dice di massimo assoluto per f .

La dimostrazione si può ottenere in modo perfettamente analogo al caso di una funzione di una variabile.

Anche per le funzioni di due variabili ha senso parlare di uniforme continuità. La relativa definizione si può formulare come segue.

Definizione 9.2.6 (uniforme continuità) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f \text{ è uniformemente continua su } X) \iff_{\text{def}} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 & : \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \\ d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta \Rightarrow & |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 9.2.2 Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sia f uniformemente continua su X

Tesi: f è continua su X .

Teorema 9.2.3 (di HEINE-CANTOR) Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Suppongo che:

1. X chiuso e limitato,
2. f continua su X ,

Tesi: f è uniformemente continua su X .

9.3 Derivate parziali.

In questo paragrafo diamo un cenno al calcolo differenziale per le funzioni di due variabili. Sostanzialmente si tratta di riformulare nozioni già considerate per le funzioni di una variabile, di conseguenza molte delle proprietà considerate in quel contesto si possono ripetere nella presente trattazione.

Definizione 9.3.1 (derivata parziale rispetto alla variabile x) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_0, y_0) \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $a > 0$ è tale che $(x_0 + h, y_0) \in X^\circ \quad \forall h \in]-a, a[$ possiamo considerare la funzione rapporto incrementale parziale di f rispetto alla variabile x e relativa al punto (x_0, y_0) ponendo

$$F :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R} \quad F(h) = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \forall h \in]-a, a[.$$

Ha senso allora la seguente definizione:

$$(f \text{ è derivabile parzialmente rispetto ad } x \text{ in } (x_0, y_0)) \iff_{\text{def}} (\exists \lim_{h \rightarrow 0} F(h) \in \mathbb{R}).$$

Quando f è derivabile in (x_o, y_o) rispetto alla variabile x porremo, per definizione,

$$f_x(x_o, y_o) = \lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h}$$

il numero reale $f_x(x_o, y_o)$ prende il nome di derivata parziale prima di f in (x_o, y_o) rispetto alla variabile x ; a volte tale derivata si indica anche con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$.

Nel seguito quando diremo che $\exists f_x(x_o, y_o)$ vorremo intendere che esiste la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x in (x_o, y_o) e che $f_x(x_o, y_o)$ è il limite finito della funzione rapporto incrementale parziale F prima considerato.

Definizione 9.3.2 (Elasticità parziale rispetto ad x) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$, sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che si abbia $f(x_o, y_o) \neq 0$, e tale che $\exists f_x(x_o, y_o)$.

Prende il nome di elasticità puntuale di f rispetto ad x in (x_o, y_o) il numero:

$$E(f)(x_o, y_o) = \frac{x_o f_x(x_o, y_o)}{f(x_o, y_o)}.$$

Invece si definisce semielasticità puntuale di f rispetto ad x in (x_o, y_o) il numero:

$$E(f)(x_o, y_o) = \frac{f_x(x_o, y_o)}{f(x_o, y_o)}.$$

Definizione 9.3.3 (derivata parziale rispetto alla variabile y) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $b > 0$ è tale che $(x_o + h, y_o) \in X^\circ \quad \forall h \in]-b, b[$ possiamo considerare la funzione rapporto incrementale parziale di f rispetto alla variabile y e relativa al punto (x_o, y_o) ponendo

$$G :]-b, b[\rightarrow \mathbb{R} \quad G(k) = \frac{f(x_o, y_o + k) - f(x_o, y_o)}{k} \quad \forall k \in]-b, b[.$$

Ha senso allora la seguente definizione:

$$(f \text{ è derivabile parzialmente rispetto ad } y \text{ in } (x_o, y_o)) \iff_{def} (\exists \lim_{k \rightarrow 0} G(k) \in \mathbb{R}).$$

Quando f è derivabile in (x_o, y_o) rispetto alla variabile y porremo, per definizione,

$$f_y(x_o, y_o) = \lim_{k \rightarrow 0} G(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_o, y_o + k) - f(x_o, y_o)}{k}$$

il numero reale $f_y(x_o, y_o)$ prende il nome di derivata parziale prima di f in (x_o, y_o) rispetto alla variabile y ; a volte tale derivata si indica anche con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.

Nel seguito quando diremo che $\exists f_y(x_o, y_o)$ vorremo intendere che esiste la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile y in (x_o, y_o) e che $f_y(x_o, y_o)$ è il limite finito della funzione rapporto incrementale parziale G prima considerato.

Definizione 9.3.4 (Elasticità parziale rispetto ad y) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$, sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che si abbia $f(x_o, y_o) \neq 0$, e tale che $\exists f_y(x_o, y_o)$.

Prende il nome di elasticità puntuale di f rispetto ad y in (x_o, y_o) il numero:

$$E(f)(x_o, y_o) = \frac{y_o f_y(x_o, y_o)}{f(x_o, y_o)}.$$

Invece si definisce *semielasticità puntuale* di f rispetto ad y in (x_o, y_o) il numero:

$$E(f)(x_o, y_o) = \frac{f_y(x_o, y_o)}{f(x_o, y_o)}.$$

Definizione 9.3.5 (gradiente) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Se esistono $f_x(x_o, y_o)$ ed $f_y(x_o, y_o)$ si dice che il vettore $(f_x(x_o, y_o), f_y(x_o, y_o))$ definisce il gradiente di f in (x_o, y_o) . Esso si indica con il simbolo $\nabla f(x_o, y_o)$ oppure con $\text{grad } f(x_o, y_o)$.

Si pone allora, per definizione,

$$\nabla f(x_o, y_o) =_{\text{def}} \text{grad } f(x_o, y_o) =_{\text{def}} (f_x(x_o, y_o), f_y(x_o, y_o))$$

Per una funzione f di una variabile è stato dimostrato che l'esistenza della derivata prima in un punto interno x_o implica la continuità di f in quel punto x_o . Per una funzione f di due variabili l'esistenza delle derivate parziali in un punto interno (x_o, y_o) non implica la continuità di f in quel punto. Si consideri infatti la funzione seguente.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \cdot y = 0 \\ 1 & \text{se } x \cdot y \neq 0 \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tale funzione non è continua nel punto $(0, 0)$, però si verifica facilmente che $\exists f_x(0, 0) = 0$ ed $\exists f_y(0, 0) = 0$.

Definizione 9.3.6 (derivata direzionale) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $u^2 + v^2 = 1$ e sia anche $a > 0$ è tale che $(x_o + tu, y_o + tv) \in X^\circ \quad \forall t \in]-a, a[$. Si chiama *funzione rapporto incrementale direzionale* di f rispetto alla direzione (u, v) e relativa al punto (x_o, y_o) la funzione

$$H :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R} \quad H(t) = \frac{f(x_o + tu, y_o + tv) - f(x_o, y_o)}{t} \quad \forall t \in]-a, a[.$$

Ha senso allora la seguente definizione:

$$(f \text{ è derivabile nella direzione } (u, v) \text{ in } (x_o, y_o)) \iff_{\text{def}} (\exists \lim_{t \rightarrow 0} H(t) \in \mathbb{R}).$$

Quando f è derivabile in (x_o, y_o) rispetto alla direzione (u, v) porremo, per definizione,

$$f_{(u,v)}(x_o, y_o) = \lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_o + tu, y_o + tv) - f(x_o, y_o)}{t}$$

il numero reale $f_{(u,v)}(x_o, y_o)$ prende il nome di *derivata direzionale* prima di f in (x_o, y_o) rispetto alla direzione (u, v) .

Si noti che se si assegna la direzione $(1, 0)$ allora si ha $f_{(1,0)}(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o)$, mentre se si assegna la direzione $(0, 1)$ si ha $f_{(0,1)}(x_o, y_o) = f_y(x_o, y_o)$.

Come nel caso delle derivate parziali anche l'esistenza della derivata direzionale di una funzione f in punto (x_o, y_o) rispetto ad una qualunque direzione (u, v) non implica la continuità in quel punto. A tale proposito si consideri il seguente esempio.

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Evidentemente f non è continua nel punto $(0, 0)$ perché non esiste il limite in $(0, 0)$ di f quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ con la condizione $y = mx^2$, cioè quando il punto (x, y) si avvicina al punto $(0, 0)$ lungo le parabole passanti per l'origine del tipo $y = mx^2$.

Si ha infatti:

$$f(x, mx) = \frac{x^2 mx^2}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{x^4 m}{x^4 (1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2} \quad \forall x \neq 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

quindi la funzione è costante su ciascuna parabola. E allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=mx^2} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

da cui si deduce che il limite dipende da m , cioè dalla parabola utilizzata, e pertanto non essendo rispettato il teorema di unicità si deduce che non è continua nell'origine degli assi cartesiani.

Invece fissato una direzione (u, v) con $u^2 + v^2 = 1$ e con $uv \neq 0$ si ha:

$$\frac{f(tu, tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^2 u^2 tv}{t^4 u^4 + t^2 v^2} = \frac{tu^2 v}{t^2 u^4 + v^2}$$

da cui si deduce che: $f_{(u,v)}(0, 0) = 0$.

Ovviamente se si considera la direzione $(u, v) = (1, 0)$ o la direzione $(u, v) = (0, 1)$ si ricava facilmente che f ha anche queste derivate direzionali ed esse sono ancora nulle, cioè si verifica facilmente che $\exists f_{(1,0)}(0, 0) = 0$ e che $\exists f_{(0,1)}(0, 0) = 0$.

Definizione 9.3.7 (funzione differenziabile) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

f è differenziabile in (x_o, y_o)

se e solo se (per definizione)

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \quad \text{ed} \quad \exists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Nella definizione si dice che sono individuati almeno due numeri a e b . In realtà essi sono univocamente individuati, e ciò si deduce dal seguente risultato.

Considereremo alcune proprietà delle funzioni differenziabili. Alcune di esse sono necessarie altre sono sufficienti. Cominciamo con quelle necessarie.

Teorema 9.3.1 Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ ed $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in (x_o, y_o) .

Tesi

$$1. \quad \exists f_x(x_o, y_o) \quad \text{ed} \quad \exists f_y(x_o, y_o),$$

2. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $u^2 + v^2 = 1$ f è derivabile in (x_o, y_o) rispetto alla direzione (u, v) e si ha: $f_{(u,v)}(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o)u + f_y(x_o, y_o)v$,
3. f è continua in (x_o, y_o) .

Dimostrazione

1) Dall'ipotesi di differenziabilità di f si trovano $a, b \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\exists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - ah - bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ponendo $k = 0$ e considerando $h > 0$ si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o) - ah}{h} = 0.$$

cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h} - a \right] = 0.$$

e quindi:

$$f_x(x_o, y_o) =_{def} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h} = a.$$

Cioè la tesi:

$$f_x(x_o, y_o) = a$$

Ponendo invece $h = 0$ e considerando $k > 0$, con ragionamento analogo, si ha $f_y(x_o, y_o) = b$.

2) Assegnato $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ con $u^2 + v^2 = 1$ e considerato $t > 0$ si prenda $h = tu$ e $k = tv$, utilizzando poi l'ipotesi di differenziabilità si ha:

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + tu, y_o + tv) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)tu - f_y(x_o, y_o)tv}{t} = 0.$$

cioè

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x_o + tu, y_o + tv) - f(x_o, y_o)}{t} - f_x(x_o, y_o)u - f_y(x_o, y_o)v \right] = 0.$$

Si deduce che:

$$f_{(u,v)}(x_o, y_o) = \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_o + tu, y_o + tv) - f(x_o, y_o)}{t} = f_x(x_o, y_o)u + f_y(x_o, y_o)v.$$

cioè la tesi:

$$f_{(u,v)}(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o)u + f_y(x_o, y_o)v.$$

3) Per dimostrare che f è continua in (x_o, y_o) occorre notare che si ha:

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) = f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k + f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k =$$

$$\frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \sqrt{h^2 + k^2} + f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k$$

quindi:

$$\begin{aligned} |f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o)| &\leq \\ \left| \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \sqrt{h^2 + k^2} &+ \\ + |f_x(x_o, y_o)| |h| + |f_y(x_o, y_o)| |k| \end{aligned}$$

Per il teorema del confronto per i limiti si ha la tesi:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o)| = 0,$$

cioè:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_o + h, y_o + k) = f(x_o, y_o). \diamond$$

Definizione 9.3.8 (differenziale) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in (x_o, y_o) .

Si definisce differenziale di f in (x_o, y_o) , e si denota con il simbolo $df(x_o, y_o)$ oppure con il simbolo $f'(x_o, y_o)$, la funzione:

$$df(x_o, y_o) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad df(x_o, y_o)(h, k) =_{def} f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Si noti che il differenziale è una funzione lineare delle variabili (h, k) , esso si può allora scrivere come prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^2$ tra il vettore gradiente $(f_x(x_o, y_o), f_y(x_o, y_o))$ ed il vettore (h, k) . Cioè:

$$df(x_o, y_o)(h, k) =_{def} f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k = (\nabla f(x_o, y_o), (h, k)) \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente perchè una funzione sia differenziabile.

Teorema 9.3.2 (del differenziale totale) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale si supponga che: $\exists \rho > 0 : I((x_o, y_o), \rho) \subseteq X$ tale che:

$$\exists f_x(x, y), \quad f_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_o, y_o), \rho) \text{ e sono continue in } (x_o, y_o).$$

Tesi: f è differenziabile in (x_o, y_o) .

Dimostrazione: Per dimostrare la tesi considero (h, k) con $h^2 + k^2 < \rho^2$ e l'espressione:

$$\frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Ad essa, dopo averla semplificata utilizzando il teorema di Lagrange, applico le ipotesi di continuità delle due derivate parziali in (x_o, y_o) .

Per questo osservo che esistono $\theta(h) \in]0, 1[$ ed $\eta(k) \in]0, 1[$ tale che si abbia:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ & \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o) + f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ & \frac{f_y(x_o + h, y_o + \eta(k)k)k + f_x(x_o + \theta(h)h, y_o)h - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ & \frac{(f_x(x_o + \theta(h)h, y_o) - f_x(x_o, y_o))h + (f_y(x_o + h, y_o + \eta(k)k) - f_y(x_o, y_o))k}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Quindi considerando il valore assoluto delle frazioni considerate e utilizzando la proprietà di subaddittività dello stesso valore assoluto si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \\ & \frac{|(f_x(x_o + \theta(h)h, y_o) - f_x(x_o, y_o))h + (f_y(x_o + h, y_o + \eta(k)k) - f_y(x_o, y_o))k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \\ & \frac{|(f_x(x_o + \theta(h)h, y_o) - f_x(x_o, y_o))h| + |(f_y(x_o + h, y_o + \eta(k)k) - f_y(x_o, y_o))k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ & |f_x(x_o + \theta(h)h, y_o) - f_x(x_o, y_o)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(x_o + h, y_o + \eta(k)k) - f_y(x_o, y_o)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \\ & |f_x(x_o + \theta(h)h, y_o) - f_x(x_o, y_o)| + |f_y(x_o + h, y_o + \eta(k)k) - f_y(x_o, y_o)| \end{aligned}$$

Fissato allora $\varepsilon > 0$ per la continuità della derivata f_x e della derivata f_y esiste $\delta > 0$, che posso supporre sia minore di ρ , tale che $\forall (h, k)$ con $h^2 + k^2 < \delta^2$ si abbia

$$|f_x(x_o + h, y_o + k) - f_x(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$|f_y(x_o + h, y_o + k) - f_y(x_o, y_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Poichè si ha anche $(\theta(h)h)^2 < \delta^2$ e $h^2 + (\eta(k)k)^2 < \delta^2$ segue la tesi. $\diamond$

Teorema 9.3.3 (derivata di una funzione composta) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in (x_o, y_o) .

Inoltre si considerino $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $t_o \in]a, b[$ e siano assegnate le due funzioni $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ per le quali si ha:

1. $\alpha(t_o) = x_o$ ed $\beta(t_o) = y_o$
2. $(\alpha(t), \beta(t)) \in X \quad \forall t \in [a, b]$
3. $\exists \alpha'(t_o)$ ed $\exists \beta'(t_o)$.

Si consideri infine la funzione composta $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = f(\alpha(t), \beta(t)) \quad \forall t \in [a, b]$

Tesi: $\exists g'(t_o) = f_x(\alpha(t_o), \beta(t_o))\alpha'(t_o) + f_y(\alpha(t_o), \beta(t_o))\beta'(t_o)$.

Dimostrazione: Sia $\tau \in \mathbb{R}$ tale che $t_o + \tau \in [a, b]$, occorre provare che

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(t_o + \tau) - g(t_o)}{\tau} = g'(t_o) = f_x(\alpha(t_o), \beta(t_o))\alpha'(t_o) + f_y(\alpha(t_o), \beta(t_o))\beta'(t_o).$$

Cioè che:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t_o + \tau), \beta(t_o + \tau)) - f(\alpha(t_o), \beta(t_o))}{\tau} = f_x(\alpha(t_o), \beta(t_o))\alpha'(t_o) + f_y(\alpha(t_o), \beta(t_o))\beta'(t_o).$$

Poichè f è differenziabile in (x_o, y_o) si ha:

$$\exists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - f_x(x_o, y_o)h - f_y(x_o, y_o)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Quindi esiste $\omega(h, k)$ con $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \omega(h, k) = 0$ tale che sia:

$$f(x_o + h, y_o + k) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k + \omega(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

Ponendo poi $h = \alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)$ e $k = \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)$ si ha:

$$f(\alpha(t_o + \tau), \beta(t_o + \tau)) - f(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o)(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)) + f_y(x_o, y_o)(\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)) +$$

$$\omega(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o), \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))\sqrt{(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o))^2 + (\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))^2}$$

Dividendo ambo i membri per τ si ha:

$$\frac{f(\alpha(t_o + \tau), \beta(t_o + \tau)) - f(\alpha(t_o), \beta(t_o))}{\tau} = f_x(x_o, y_o)\frac{\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)}{\tau} + f_y(x_o, y_o)\frac{\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)}{\tau} +$$

$$\omega(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o), \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))\frac{\sqrt{(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o))^2 + (\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))^2}}{\tau} =$$

$$f_x(x_o, y_o)\frac{\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)}{\tau} + f_y(x_o, y_o)\frac{\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)}{\tau} +$$

$$\omega(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o), \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))\frac{|\tau|}{\tau} \frac{\sqrt{(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o))^2 + (\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))^2}}{|\tau|} =$$

$$\begin{aligned}
& f_x(x_o, y_o) \frac{\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)}{\tau} + f_y(x_o, y_o) \frac{\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)}{\tau} + \\
& \omega(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o), \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)) \frac{|\tau|}{\tau} \sqrt{\frac{(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o))^2 + (\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o))^2}{\tau^2}} = \\
& f_x(x_o, y_o) \frac{\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)}{\tau} + f_y(x_o, y_o) \frac{\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)}{\tau} + \\
& \omega(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o), \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)) \frac{|\tau|}{\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)}{\tau}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Considerando il limite per $\tau \rightarrow 0$ e tenendo conto che, per ipotesi, risulta:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \omega(\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o), \beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_o + \tau) - \alpha(t_o)}{\tau} = \alpha'(t_o) \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\beta(t_o + \tau) - \beta(t_o)}{\tau}$$

si ha la tesi. $\diamond$

Come per le funzioni di una variabile anche per quelle di due variabili si può parlare di derivate di ordine due.

Esistono allora le derivate prime della derivata f_x , cioè le derivate seconde f_{xx} ed f_{xy} . La prima prende il nome di derivata seconda pura rispetto alla variabile x , la seconda invece si chiama derivata seconda mista fatta prima rispetto alla variabile x e poi rispetto alla variabile y .

In modo analogo sono definite le derivate prime della derivata f_y ; sono cioè definite le derivate seconde f_{yx} ed f_{yy} . La prima prende il nome di derivata seconda mista fatta prima rispetto alla variabile y e poi rispetto alla variabile x , la seconda invece si chiama derivata seconda pura rispetto alla variabile y .

Queste quattro derivate definiscono una matrice quadrata, che si denota con $H_f(x, y)$ e che si chiama la matrice Hessiana di f . La prima riga ha le derivate prime della derivata f_x , mentre la seconda riga ha le derivate prime della derivata f_y .

La sua definizione è:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Il seguente risultato consente di affermare quando tale matrice è simmetrica, cioè quando si ha $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Teorema 9.3.4 (di SCHWARTZ) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia assegnata una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale si supponga che: $\exists \rho > 0 : I((x_o, y_o), \rho) \subseteq X$ e tale che:*

1. $\exists f_x(x, y), f_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_o, y_o), \rho)$ e sono continue in $I((x_o, y_o), \rho)$.
2. $\exists f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_o, y_o), \rho)$ e sono continue in (x_o, y_o)

Tesi: $f_{xy}(x_o, y_o) = f_{yx}(x_o, y_o)$.

Dimostrazione: Considero (h, k) tale che $h^2 + k^2 < \rho^2$ e l'espressione

$$F(h, k) = f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o + k) + f(x_o, y_o).$$

Ponendo $G(x) = f(x, y_o + k) - f(x, y_o)$ si ha $G(x_o + h) - G(x_o) = F(h, k)$, inoltre G è derivabile e si ha: $G'(x) = f_x(x, y_o + k) - f_x(x, y_o)$. Si può allora applicare il teorema di Lagrange a G sull'intervallo $[x_o, x_o + h]$ ed $\exists \alpha(h) \in]0, 1[$ tale che:

$$F(h, k) = G(x_o + h) - G(x_o) = G'(x_o + \alpha(h)h)h = (f_x(x_o + \alpha(h)h, y_o + k) - f_x(x_o + \alpha(h)h, y_o))h$$

Riapplicando il teorema di Lagrange alla funzione $f_x(x_o + \alpha(h)h, y)$ rispetto alla variabile y sull'intervallo $[y_o, y_o + k]$ $\exists \beta(k) \in]0, 1[$ tale che:

$$F(h, k) = G(x_o + h) - G(x_o) = G'(x_o + \alpha(h)h)h = (f_x(x_o + \alpha(h)h, y_o + k) - f_x(x_o + \alpha(h)h, y_o))h =$$

$$(f_{xy}(x_o + \alpha(h)h, y_o + \beta(k)k))hk.$$

In modo perfettamente analogo, applicando il medesimo ragionamento alla funzione $H(y) = f(x_o + h, y) - f(x_o, y)$ sull'intervallo $[y_o, y_o + k]$, si prova che $\exists \gamma(k) \in]0, 1[$ tale che:

$$F(h, k) = H(y_o + k) - H(y_o) = H'(y_o + \gamma(k)k)k = (f_y(x_o + h, y_o + \gamma(k)k) - f_y(x_o, y_o + \gamma(k)k))k.$$

Riapplicando ora il teorema di Lagrange alla funzione $f_y(x, y_o + \gamma(k)k)$ rispetto alla variabile x sull'intervallo $[x_o, x_o + h]$ $\exists \eta(h) \in]0, 1[$ tale che:

$$F(h, k) = H(y_o + k) - H(y_o) = H'(y_o + \gamma(k)k)k = (f_y(x_o + h, y_o + \gamma(k)k) - f_y(x_o, y_o + \gamma(k)k))h =$$

$$(f_{yx}(x_o + \eta(h)h, y_o + \gamma(k)k))hk.$$

Concludendo questa fase si può dire che: $\exists \alpha(h), \beta(k), \gamma(k), \eta(h) \in]0, 1[$ tale che:

$$f_{xy}(x_o + \alpha(h)h, y_o + \beta(k)k) = f_{yx}(x_o + \eta(h)h, y_o + \gamma(k)k).$$

Dall'ipotesi di continuità per le derivate parziali seconde si ha:

$$\exists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x_o + h, y_o + k) = f_{xy}(x_o, y_o) \text{ ed anche } \exists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_{yx}(x_o + h, y_o + k) = f_{yx}(x_o, y_o).$$

Applicando ora la definizione di limite si ottiene la tesi, cioè: $f_{xy}(x_o, y_o) = f_{yx}(x_o, y_o)$. $\diamond$

Il risultato sulla coincidenza delle derivate seconde si estende facilmente alle derivate di ordine superiore. Quindi ad esempio, in ipotesi di continuità delle derivate di ordine tre, applicando il teorema di SCHWARTZ si ha $f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}$.

Il ragionamento si estende ovviamente alle derivate di ordine superiore

Osservazione 9.3.1 *Se le derivate seconde miste non sono continue in (x_o, y_o) non è detto che si abbia*

$$f_{xy}(x_o, y_o) = f_{yx}(x_o, y_o).$$

Per questo motivo si consideri il seguente esempio:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se si ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se si ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Le derivate prime della funzione data sono:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se si ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se si ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ed} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se si ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se si ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Le derivate seconde miste nell'origine sono rispettivamente: $f_{xy}(0, 0) = -1$ ed $f_{yx}(0, 0) = 1$. $\diamond$

Una funzione reale f definita su un insieme aperto X di $\mathbb{R}^2$ che sia continua e che abbia derivate parziali prime e seconde tutte continue si dice che è di classe C^2 .

Indicheremo con $C^2(X)$ l'insieme di tutte queste funzioni f . Più in generale, assegnato $n \in \mathbb{N}$, indicheremo con $C^n(X)$ l'insieme di tutte le funzioni reali f definite sull'insieme aperto X che sono continue e che hanno tutte le derivate parziali fino all'ordine n compreso e tutte sono continue.

Definizione 9.3.9 (Polinomio di Taylor) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

1. X è aperto (cioè $X = X^\circ$)
2. $f \in C^2(X)$

Consideriamo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la funzione

$$P_2(h, k) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_o, y_o)h^2 + 2f_{xy}(x_o, y_o)hk + f_{yy}(x_o, y_o)k^2)$$

prende il nome di polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione f di punto iniziale (x_o, y_o)

Il seguente risultato lega il valore $f(x_o + h, y_o + k)$ della funzione ed il suo polinomio di Taylor di ordine 2.

Teorema 9.3.5 (di Taylor) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

1. X è aperto (cioè $X = X^\circ$)
2. $f \in C^2(X)$

$$\text{Tesi: } \exists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - P_2(h, k)}{h^2 + k^2} = 0.$$

Dimostrazione: Dal teorema precedente si deduce che esiste $\theta \in]0, 1[$ tale che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k =$$

$$\frac{1}{2} (f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2 + 2f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)hk + f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k^2).$$

Ne segue che

$$R((x_0, y_0), (h, k)) = \frac{1}{2} ([f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xx}(x_0, y_0)] h^2 +$$

$$2[f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xy}(x_0, y_0)] hk + [f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{yy}(x_0, y_0)k^2]).$$

Ne segue che:

$$\left| \frac{R((x_0, y_0), (h, k))}{h^2 + k^2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{h^2 + k^2} |f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xx}(x_0, y_0)| + \right.$$

$$\left. \frac{2|hk|}{h^2 + k^2} |f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xy}(x_0, y_0)| + \frac{k^2}{h^2 + k^2} |f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{yy}(x_0, y_0)| \right)$$

E quindi essendo $\frac{h^2}{h^2 + k^2} \leq 1$, $\frac{2|hk|}{h^2 + k^2} \leq 1$ e $\frac{k^2}{h^2 + k^2} \leq 1$ si ha:

$$\left| \frac{R((x_0, y_0), (h, k))}{h^2 + k^2} \right| \leq \frac{1}{2} [|f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xx}(x_0, y_0)| +$$

$$|f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{xy}(x_0, y_0)| + |f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f_{yy}(x_0, y_0)|].$$

La continuità delle derivate seconde fornisce la tesi. $\diamond$

Definizione 9.3.10 (Formula di Taylor con resto di Peano) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_0, y_0) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. X è aperto (cioè $X = X^\circ$)
2. $f \in C^2(X)$

Consideriamo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ed il polinomio di Taylor di ordine 2:

$$P_2(h, k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2)$$

Considerato poi $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tale che $(x_o + h, y_o + k) \in X$, la differenza $f(x_o + h, y_o + k) - P_2(h, k)$ definisce un quantità che sarà indicata con $R_2(h, k)$ e che prende il nome di resto nella forma di Peano.

La relazione:

$$f(x_o + h, y_o + k) = P_2(h, k) + R_2(h, k) =$$

$$f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_o, y_o)h^2 + 2f_{xy}(x_o, y_o)hk + f_{yy}(x_o, y_o)k^2) + R_2(h, k)$$

prende il nome di formula di Taylor di ordine 2 di f di punto iniziale (x_o, y_o) .

Come nel caso delle funzioni di una variabile esiste la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange.

Teorema 9.3.6 (Formula di Taylor nella forma di Lagrange) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. X è aperto (cioè $X = X^\circ$)
2. $f \in C^2(X)$

Sia $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ con $(x_o + th, y_o + tk) \in X \quad \forall t \in [0, 1]$

Tesi: $\exists \theta \in]0, 1[$ tale che:

$$f(x_o + h, y_o + k) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)h + f_y(x_o, y_o)k +$$

$$\frac{1}{2} (f_{xx}(x_o + \theta h, y_o + \theta k)h^2 + 2f_{xy}(x_o + \theta h, y_o + \theta k)hk + f_{yy}(x_o + \theta h, y_o + \theta k)k^2).$$

La formula appena scritta si definisce formula di Taylor di ordine 1 di f di punto iniziale (x_o, y_o) .

Dimostrazione: Considero la funzione $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione:

$$g(t) = f((x_o + th, y_o + tk)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte la funzione g ha derivate prima e seconda continua e, utilizzando anche il teorema di SCHWARTZ si ha:

$$g'(t) = f_x(x_o + th, y_o + tk)h + f_y(x_o + th, y_o + tk)k$$

e

$$g''(t) = f_{xx}(x_o + th, y_o + tk)h^2 + 2f_{xy}(x_o + th, y_o + tk)hk + f_{yy}(x_o + th, y_o + tk)k^2.$$

Quindi considerando la formula di Taylor con il resto di Lagrange per g esiste $\theta \in]0, 1[$ per cui si ha:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\theta)$$

che fornisce la tesi perché si ha: $g(1) = f(x_o + h, y_o + k)$ e $g(0) = f(x_o, y_o)$. $\diamond$

9.4 Massimi e minimi relativi interni.

In questo paragrafo si presentano alcune condizioni necessarie ed alcune condizioni sufficienti in modo che un punto (x_o, y_o) interno ad un insieme X sia di massimo o di minimo relativo per una funzione assegnata f .

Definizione 9.4.1 (punto di massimo o di minimo relativo) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. (x_o, y_o) è punto di minimo relativo per f su X
se e solo se (per definizione)
 $\exists \rho > 0 : \quad \forall (x, y) \in X \cap I((x_o, y_o), \rho) \quad f(x_o, y_o) \leq f(x, y).$
2. (x_o, y_o) è punto di massimo relativo per f su X
se e solo se (per definizione),
 $\exists \rho > 0 : \quad \forall (x, y) \in X \cap I((x_o, y_o), \rho) \quad f(x_o, y_o) \geq f(x, y).$

Vale il seguente risultato:

Teorema 9.4.1 (FERMAT) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Suppongo che:

1. (x_o, y_o) è punto di minimo o di massimo relativo per f su X ;
2. $(x_o, y_o) \in X^\circ$;
3. $\exists f_x(x_o, y_o)$, ed $\exists f_y(x_o, y_o)$.

Tesi: $f_x(x_o, y_o) = 0$ ed $f_y(x_o, y_o) = 0$.

Dimostrazione: Poichè $(x_o, y_o) \in X^\circ$ esiste $\rho_1 > 0$ tale che si abbia $I((x_o, y_o), \rho_1) \subseteq X$.

Inoltre se (x_o, y_o) è punto di minimo relativo per f su X esiste $\rho_2 > 0$ tale che si abbia $f(x_o, y_o) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_o, y_o), \rho_2) \cap X$.

Posto allora $\rho = \min \{\rho_1, \rho_2\}$ si ha

$$f(x_o, y_o) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in I((x_o, y_o), \rho).$$

Ponendo $y = y_o$ si ottiene:

$$f(x_o, y_o) \leq f(x, y_o) \quad \forall x \text{ tale che } (x, y_o) \in I((x_o, y_o), \rho).$$

Per il teorema di Fermat per funzioni di una variabile si ottiene la tesi, cioè:

$$f_x(x_o, y_o) = 0.$$

Ponendo invece $x = x_o$ si ottiene, in modo analogo,

$$f_y(x_o, y_o) = 0.$$

La stessa tesi si ottiene se (x_o, y_o) è punto di massimo relativo per f . $\diamond$

Le condizioni dimostrate si denotano nel seguito come condizioni di stazionarietà per f in (x_o, y_o) . A tale proposito si può considerare la seguente definizione.

Definizione 9.4.2 (punto stazionario) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X^\circ$ sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e suppongo che: $\exists f_x(x_o, y_o)$, ed $\exists f_y(x_o, y_o)$.

$$((x_o, y_o) \text{ si dice stazionario}) \iff_{\text{def}} (f_x(x_o, y_o) = 0 \text{ ed } f_y(x_o, y_o) = 0).$$

Ovviamente, come nel caso di funzioni di una variabile, esse non sono in generale sufficienti perchè il punto sia di massimo o di minimo relativo. A tale scopo si consideri il seguente esempio.

La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ha le derivate parziali prime nulle nell'origine, cioè si ha $f_x(0, 0) = 0$ ed $f_y(0, 0) = 0$. Naturalmente $(0, 0)$ non è nè di massimo e nè di minimo per f nè assoluto e nè relativo.

Vale anche la seguente condizione necessaria.

Teorema 9.4.2 Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.
Suppongo che:

1. (x_o, y_o) è punto di minimo relativo per f su X ;
2. $(x_o, y_o) \in X^\circ$;
3. $f \in C^2(X^\circ)$.

Tesi:

$$f_x(x_o, y_o) = 0 \quad f_y(x_o, y_o) = 0,$$

ed

$$f_{xx}(x_o, y_o) \geq 0, \quad f_{yy}(x_o, y_o) \geq 0, \quad f_{xx}(x_o, y_o)f_{yy}(x_o, y_o) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2 \geq 0.$$

Dimostrazione: Le condizioni riguardanti le derivate prime sono state verificate nel teorema di FERMAT.

Per dimostrare quelle del secondo ordine considero $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, poichè $(x_o, y_o) \in X^\circ$, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall t \in]-\delta, \delta[$ si ha $(x_o + th, y_o + tk) \in X^\circ \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$.

Poichè (x_o, y_o) è punto di minimo relativo per f su X , $t = 0$ è punto di minimo relativo per la funzione $t \in]-\delta, \delta[\rightarrow g(t) = f(x_o + th, y_o + tk)$. Per i risultati per le funzioni di una variabile si ha: $g''(0) \geq 0$, cioè

$$f_{xx}(x_o, y_o)h^2 + 2f_{xy}(x_o, y_o)hk + f_{yy}(x_o, y_o)k^2 \geq 0 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Ponendo ora $h = 1$ e $k = 0$ si ottiene $f_{xx}(x_o, y_o) \geq 0$, ponendo poi $h = 0$ e $k = 1$ si ricava $f_{yy}(x_o, y_o) \geq 0$.

Infine, essendo non negativa l'espressione quadratica in (h, k) per qualunque $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, il suo discriminante è non positivo.

Cioè si ha:

$$(f_{xy}(x_o, y_o))^2 - f_{xx}(x_o, y_o)f_{yy}(x_o, y_o) \leq 0.$$

Cambiandone il segno si ha anche l'ultima disuguaglianza. $\diamond$

Analogo risultato si ottiene per il caso in cui il punto è di massimo relativo.

Teorema 9.4.3 Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.
Suppongo che:

1. (x_o, y_o) è punto di massimo relativo per f su X ;
2. $(x_o, y_o) \in X^\circ$;
3. $f \in C^2(X^\circ)$.

Tesi:

$$f_x(x_o, y_o) = 0 \quad f_y(x_o, y_o) = 0,$$

ed

$$f_{xx}(x_o, y_o) \leq 0, \quad f_{yy}(x_o, y_o) \leq 0, \quad f_{xx}(x_o, y_o)f_{yy}(x_o, y_o) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2 \geq 0.$$

La dimostrazione è simile alla precedente e viene lasciata per esercizio al lettore. $\diamond$

Le condizioni precedenti non sono sufficienti ad avere il punto di massimo o di minimo relativo. Si consideri a tal proposito la funzione: $f(x, y) = x^3 - y^3$. Per essa l'origine degli assi cartesiani è stazionario e sono nulle in esso anche tutte le derivate di ordine due. Tale punto però non è nè di massimo e nè di minimo per f .

Prima di considerare alcune condizioni sufficienti introduciamo la definizione di forma quadratica bidimensionale ed alcune sue proprietà.

Definizione 9.4.3 (Forma quadratica bidimensionale) Siano assegnati $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Si definisce forma quadratica bidimensionale la funzione $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad Q(h, k) = \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2$

1. Q é definita positiva $\iff_{def} \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad Q(h, k) > 0$,
2. Q é semidefinita positiva $\iff_{def} \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad Q(h, k) \geq 0$,
3. Q é definita negativa $\iff_{def} \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad Q(h, k) < 0$,
4. Q é semidefinita negativa $\iff_{def} \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad Q(h, k) \leq 0$.
5. Q é indefinita $\iff_{def} \quad \exists (h, k), (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : \quad Q(h, k) > 0 \text{ e } Q(u, v) < 0$.

Teorema 9.4.4 Siano assegnati $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e sia $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da: $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad Q(h, k) = \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2$

Tesi

1. $Q(th, tk) = t^2 Q(h, k) \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$,
2. $\alpha\gamma - \beta^2 > 0, \alpha > 0 \implies Q \text{ definita positiva} \implies \exists c > 0 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad Q(h, k) \geq c(h^2 + k^2)$

$$3. \quad \alpha\gamma - \beta^2 > 0, \quad \alpha < 0 \implies Q \text{ definita negativa} \implies \exists c > 0 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad Q(h, k) \leq -c(h^2 + k^2)$$

Dimostrazione. La verifica di 1) é immediata.

Per avere la 2) osservo anzitutto che si ha anche $\gamma > 0$.

Risulta anche: $Q(h, 0) = \alpha h^2 > 0 \quad \forall h \neq 0$ e, per $k \neq 0$, $Q(h, k) = k^2 \left[\alpha \left(\frac{h}{k} \right)^2 + 2\beta \frac{h}{k} + \gamma \right] \quad \forall k \neq 0$

Infine si noti che il trinomio in parentesi quadre ha discriminante negativo perché si ha $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, quindi é positivo. $\diamond$

Una condizione sufficiente che utilizza le derivate seconde è rappresentata dal seguente teorema.

Teorema 9.4.5 *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, $(x_o, y_o) \in X$ e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Suppongo che:

1. $(x_o, y_o) \in X^\circ$;
2. $f \in C^2(X^\circ)$;
3. $f_x(x_o, y_o) = 0 \quad f_y(x_o, y_o) = 0$,

Tesi: i) $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$, $f_{xx}(x_o, y_o)f_{yy}(x_o, y_o) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2 > 0 \implies (x_o, y_o)$ è punto di minimo relativo.

ii) $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$, $f_{xx}(x_o, y_o)f_{yy}(x_o, y_o) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2 > 0 \implies (x_o, y_o)$ è punto di massimo relativo.

iii) $f_{xx}(x_o, y_o)f_{yy}(x_o, y_o) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2 < 0 \implies (x_o, y_o)$ non è nè di massimo nè di minimo.

Dimostrazione: Sia (h, k) tale si abbia anche $(x_o + h, y_o + k) \in X$. Consideriamo la formula di Taylor di f di punto iniziale (x_o, y_o) con il resto nella forma di Peano tenendo conto che si ha $f_x(x_o, y_o) = 0 \quad f_y(x_o, y_o) = 0$.

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) = \frac{1}{2} (f_{xx}(x_o, y_o)h^2 + 2f_{xy}(x_o, y_o)hk + f_{yy}(x_o, y_o)k^2) + R_2(h, k)$$

Nell'ipotesi i) verifichiamo che esiste $c > 0$ per cui si ha:

$$Q(h, k) = f_{xx}(x_o, y_o)h^2 + 2f_{xy}(x_o, y_o)hk + f_{yy}(x_o, y_o)k^2 \geq c(h^2 + k^2) \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Infatti si consideri la funzione Q sull'insieme $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$; Q é continua S é chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, esiste $c > 0$ tale che si abbia:

$$Q(u, v) \geq c \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Preso ora $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ considero $(u, v) = (\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}})$, evidentemente si ha $(u, v) = (\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}) \in S$ quindi vale la relazione:

$$Q\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \geq c$$

risulta però

$$Q\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right) = \frac{Q(h, k)}{h^2 + k^2}$$

quindi si ha:

$$\frac{Q(h, k)}{h^2 + k^2} \geq c$$

cioé

$$Q(h, k) \geq c(h^2 + k^2).$$

Tornando alla formula di Taylor si ha:

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) \geq \frac{c}{2}(h^2 + k^2) + R_2(h, k)$$

cioé

$$\frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o)}{h^2 + k^2} \geq \frac{c}{2} + \frac{R_2(h, k)}{h^2 + k^2}.$$

Tenendo presente la definizione di limite e assegnando $\frac{c}{4}$ esiste $I \in \mathcal{I}(x_o, y_o)$ tale che $\forall(h, k) \in \mathbb{R}^2$ con $(x_o + h, y_o + k) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\}$ si ha $-\frac{c}{4} \leq \frac{R_2(h, k)}{h^2 + k^2} \leq \frac{c}{4}$.

Quindi $\forall(h, k) \in \mathbb{R}^2$ con $(x_o + h, y_o + k) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\}$ risulta:

$$\frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o)}{h^2 + k^2} \geq \frac{c}{2} + \frac{R_2(h, k)}{h^2 + k^2} \geq \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{4} > 0,$$

cioé

$$\forall(h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad (x_o + h, y_o + k) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} \quad \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o)}{h^2 + k^2} > 0$$

da cui si deduce che (x_o, y_o) é punto di minimo relativo. Cioé si ha:

$$\forall(h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad (x_o + h, y_o + k) \in I \cap X \setminus \{(x_o, y_o)\} \quad f(x_o + h, y_o + k) > f(x_o, y_o).$$

Analogamente la dimostrazione dei punti ii) e iii). $\diamond$

9.5 Massimi e minimi vincolati.

In questo presentiamo alcune condizioni necessarie ed alcune condizioni sufficienti in modo che un punto (x_o, y_o) sia di massimo o di minimo relativo per una funzione assegnata f . Considereremo il caso in cui f , pur essendo una funzione reale definita su un insieme X dotato di punti interni, vada studiata su un sottoinsieme Z , che chiameremo vincolo, di X . L'insieme Z é privo di punti interni, cioè risulta $Z^\circ = \emptyset$, e verifica anche la seguente ipotesi di regolarità.

Definizione 9.5.1 (vincolo regolare) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, X aperto, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, e si consideri $Z = \{(x, y) \in X : g(x, y) = 0\}$ con $Z \neq \emptyset$.

$$(Z \text{ é regolare}) \iff_{def} (g \in C^1(X) \text{ e se } \forall (x_o, y_o) \in Z \quad (g_x(x_o, y_o))^2 + (g_y(x_o, y_o))^2 > 0.)$$

Quindi un vincolo per essere regolare non deve avere punti stazionari per la funzione g che lo definisce. Il seguente risultato permette di affermare che un vincolo regolare è localmente grafico di una funzione.

Teorema 9.5.1 (del DINI) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, X aperto, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $Z = \{(x, y) \in X : g(x, y) = 0\}$, $Z \neq \emptyset$ ed $(x_o, y_o) \in Z$. Suppongo:*

1. g continua in X .
2. $\exists g_y$ continua in X
3. $g_y(x_o, y_o) \neq 0$

Tesi:

i) $\exists \delta > 0$ ed $\exists u : [x_o - \delta, x_o + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$\begin{cases} u(x_o) = y_o, \\ (x, u(x)) \in X \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta] \\ g(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta], \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (x, u(x)) \in Z \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta].$$

ii) Se $\exists g_x$ continua in X allora

$$\exists u'(x) = -\frac{g_x(x, u(x))}{g_y(x, u(x))} \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta].$$

iii) Se poi, assegnato $k \in \mathbb{N}$, si ha anche: $g \in C^k(X)$ allora $u \in C^k([x_o - \delta, x_o + \delta])$.

Dimostrazione: Essendo $g_y(x_o, y_o) \neq 0$, sia $g_y(x_o, y_o) > 0$. Poichè g_y è continua in X che é aperto, esiste $\alpha > 0$ tale che $[x_o - \alpha, x_o + \alpha] \times [y_o - \alpha, y_o + \alpha] \subseteq X^\circ$ e tale che si abbia $g_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in [x_o - \alpha, x_o + \alpha] \times [y_o - \alpha, y_o + \alpha]$.

Ovviamente risulta anche $g_y(x_o, y) > 0 \quad \forall y \in [y_o - \alpha, y_o + \alpha]$, quindi la funzione $g(x_o, y)$ è strettamente crescente sull'intervallo $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$. Inoltre essendo anche $g(x_o, y_o) = 0$ si ha anche $g(x_o, y_o - \alpha) < 0$ e $g(x_o, y_o + \alpha) > 0$.

Esiste allora $\delta > 0$ tale che si abbia anche $g(x, y_o - \alpha) < 0 \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$ e $g(x, y_o + \alpha) > 0 \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$. Suppongo, per comodità, che si abbia anche $\delta \leq \alpha$.

Considerato ora $\bar{x} \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$ la funzione $y \in [y_o - \alpha, y_o + \alpha] \rightarrow g(\bar{x}, y)$ è strettamente crescente, quindi esiste un unico $\bar{y} \in [y_o - \alpha, y_o + \alpha]$ tale che si abbia $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Pongo ora $u(\bar{x}) = \bar{y}$.

Ovviamente si ha $u(x_o) = y_o$. Quindi u è definita sull'intervallo $[x_o - \delta, x_o + \delta]$ ed ha valori nell'intervallo $[y_o - \alpha, y_o + \alpha]$.

L'unicità di u segue dal modo con cui è stata costruita.

La continuità della funzione u è stata già di fatto verificata nella dimostrazione appena conclusa per dimostrare l'esistenza di u .

Infatti dopo aver fissato $\alpha > 0$ è stato individuato $\delta > 0$ con le proprietà appena dette. Ora poichè α è arbitrario, resta provata la continuità di u in x_o . La continuità negli altri punti si prova allo stesso modo.

Nell'ipotesi che esista $g_x \in C(X)$, per dimostrare che u è derivabile in x_o , considero $h \neq 0$ tale che $x_o + h \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$.

Verifico che:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h} = - \frac{g_x(x_o, u(x_o))}{g_x(x_o, u(x_o))}.$$

Cioè che vale la seguente definizione di limite:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \eta < \delta \quad \text{tale che} \quad \forall h \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\} \quad \text{si ha:} \quad \left| \frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h} + \frac{g_x(x_o, u(x_o))}{g_x(x_o, u(x_o))} \right| < \epsilon$$

Fisso $\epsilon > 0$ e considero ora la funzione

$$(x, y) \in [x_o - \delta, x_o + \delta] \times [y_o - \alpha, y_o + \alpha] \longrightarrow \frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} \in \mathbb{R}.$$

Poiché essa è continua, assegnato $\epsilon > 0$ esiste $\gamma > 0$, per il quale si può supporre che si abbia anche $\gamma \leq \delta$ e $\gamma \leq \alpha$, tale che:

$$\forall (x, y) \in [x_o - \gamma, x_o + \gamma] \times [y_o - \gamma, y_o + \gamma] \quad \text{risulti} \quad \left| \frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} - \frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)} \right| < \epsilon.$$

Poiché anche la funzione u è continua in x_o esiste $\eta > 0$, che si può prendere in modo che si abbia anche $\eta \leq \gamma$, tale che:

$$\forall h \in [-\eta, \eta] \quad \text{risulti} \quad u(x_o + h) \in [y_o - \gamma, y_o + \gamma].$$

Considero poi anche la formula di Taylor di ordine 1 di g con il resto nella forma di Lagrange.

Essa consente di affermare che, per ogni $h \neq 0$ con $h \in [-\eta, \eta]$, esiste almeno un punto $(\eta(h), \xi(h))$ che sta sul segmento S che congiunge $(x_o, u(x_o))$ ed $(x_o + h, u(x_o + h))$ tale che si abbia:

$$0 = g(x_o + h, u(x_o + h)) - g(x_o, u(x_o)) = g_x(\eta(h), \xi(h))h + g_y(\eta(h), \xi(h))(u(x_o + h) - u(x_o))$$

cioè

$$\frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h} = - \frac{g_x(\eta(h), \xi(h))}{g_y(\eta(h), \xi(h))}.$$

Poiché $(\eta(h), \xi(h))$ sta sul segmento S che congiunge $(x_o, u(x_o))$ ed $(x_o + h, u(x_o + h))$, cioè $(\eta(h), \xi(h)) \in S$ risulta anche:

$$(\eta(h), \xi(h)) \in [x_o - \eta, x_o + \eta] \times [y_o - \gamma, y_o + \gamma] \subseteq [x_o - \gamma, x_o + \gamma] \times [y_o - \gamma, y_o + \gamma]$$

e quindi:

$$\left| \frac{g_x(\eta(h), \xi(h))}{g_y(\eta(h), \xi(h))} - \frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)} \right| < \epsilon$$

e pertanto:

$$\left| \frac{u(x_o + h) - u(x_o)}{h} + \frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)} \right| = \left| -\frac{g_x(\eta(h), \xi(h))}{g_y(\eta(h), \xi(h))} + \frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)} \right| = \left| \frac{g_x(\eta(h), \xi(h))}{g_y(\eta(h), \xi(h))} - \frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)} \right| < \epsilon.$$

In modo analogo si prova la derivabilità di u in ogni altro punto $\bar{x}$ dell'intervallo $[x_o - \delta, x_o + \delta]$.

Per dimostrare l'ulteriore regolarità della funzione u la verifica si può fare per induzione su k . Infatti se g è di classe C^1 allora anche u è di classe C^1 . Supponendo inoltre che u sia di classe C^{k-1} e che g sia di classe C^k , dalla formula della derivata di u si ottiene che u' è di classe C^{k-1} , quindi u risulta di classe C^k . $\diamond$

Osservazione 9.5.1 *Nel caso che g sia di classe $C^2(X)$, con X aperto, anche u è di classe C^2 . Per le sue derivate prima e seconda e $\forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$ si hanno le formule seguenti:*

$$u'(x) = -\frac{g_x(x, u(x))}{g_y(x, u(x))}$$

ed

$$u''(x) = \frac{g_{xx}(x, u(x)) [g_y(x, u(x))]^2 - 2g_{xy}(x, u(x))g_x(x, u(x))g_y(x, u(x)) + g_{yy}(x, u(x)) [g_x(x, u(x))]^2}{[g_y(x, u(x))]^3}$$

Infatti $\forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$, si ha:

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\frac{1}{(g_y(x, u(x)))^2} [(g_{xx}(x, u(x)) + g_{xy}(x, u(x))u'(x))g_y(x, u(x)) - \\ &\quad g_x(x, u(x))(g_{yx}(x, u(x)) + g_{yy}(x, u(x))u'(x))] = \\ &= -\frac{1}{(g_y(x, u(x)))^2} [(g_{xx}(x, u(x)) + g_{xy}(x, u(x))(-\frac{g_x(x, u(x))}{g_y(x, u(x))}))g_y(x, u(x)) - \\ &\quad g_x(x, u(x))(g_{yx}(x, u(x)) + g_{yy}(x, u(x))(-\frac{g_x(x, u(x))}{g_y(x, u(x))}))] = \\ &= -\frac{1}{(g_y(x, u(x)))^2} [g_{xx}(x, u(x))g_y(x, u(x)) - g_{xy}(x, u(x))g_x(x, u(x)) - \\ &\quad \frac{g_{yx}(x, u(x))g_x(x, u(x))g_y(x, u(x)) - g_{yy}(x, u(x))(g_x(x, u(x)))^2}{g_y(x, u(x))}] = \\ &= \frac{g_{xx}(x, u(x))(g_y(x, u(x)))^2 - 2g_{xy}(x, u(x))g_x(x, u(x))g_y(x, u(x)) + g_{yy}(x, u(x))(g_x(x, u(x)))^2}{(g_y(x, u(x)))^3}. \diamond \end{aligned}$$

Esiste anche la seguente versione del teorema del Dini.

Teorema 9.5.2 (del DINI) *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, X aperto, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $Z = \{(x, y) \in X : g(x, y) = 0\}$, $Z \neq \emptyset$ ed $(x_0, y_0) \in Z$. Suppongo:*

1. g continua in X .
2. $\exists g_x$ continua in X
3. $g_x(x_0, y_0) \neq 0$

Tesi:

i) $\exists \sigma > 0$ ed $\exists v : [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$\begin{cases} v(y_0) = x_0, \\ (v(y), y) \in X \quad \forall y \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \\ g(v(y), y) = 0 \quad \forall y \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma], \end{cases} \quad \text{cioè} \quad (v(y), y) \in Z \quad \forall y \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma].$$

ii) Se $\exists g_y$ continua in X allora

$$\exists v'(y) = -\frac{g_y(v(y), y)}{g_x(v(y), y)} \quad \forall y \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma].$$

iii) Se poi, assegnato $k \in \mathbb{N}$, si ha anche: $g \in C^k(X)$ allora $v \in C^k([y_0 - \sigma, y_0 + \sigma])$.

Dimostrazione: È analoga a quella fatta nel precedente risultato. $\diamond$

Il teorema del Dini fornisce quindi una condizione sufficiente perchè sia definita localmente una funzione che ha la stessa regolarità della funzione g che la definisce.

Inoltre è evidente che l'insieme Z degli zeri di g , se è regolare, è localmente grafico quindi non ha punti interni, cioè $Z^\circ = \emptyset$.

Osservazione 9.5.2 *L'ipotesi di esistenza della derivata parziale g_y è solo sufficiente.*

Si consideri infatti la funzione $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla relazione $h(x, y) = 1$ se x ed y sono razionali ed $h(x, y) = 2$ se x o y sono irrazionali e la funzione $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data dalla relazione $g(x, y) = yh(x, y)$.

Ovviamente entrambe le funzioni h e g non sono continue; però l'insieme $Z = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ rappresenta l'asse delle ascisse e la funzione definita implicitamente è quella nulla. $\diamond$

Osservazione 9.5.3 *Se non è regolare allora Z può avere punti interni.*

Si consideri la funzione $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x, y) = 0$.

In tal caso $Z = \mathbb{R}^2$ e inoltre $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e si ha $g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\diamond$

Nel seguito, assegnati $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $Z \subseteq X$, siamo interessati a studiare i punti di massimo e/o di minimo della funzione restrizione di f al sottoinsieme Z di X : $f|_Z : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 9.5.2 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$; $Z \subseteq X$, $Z \neq \emptyset$; $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in Z$.*

1. $(x_0, y_0) \in Z$ è punto di massimo relativo per f su Z
se e solo se (per definizione)

$$\exists I \in \mathcal{I}(x_0, y_0) : \forall (x, y) \in I \cap Z \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

2. $(x_o, y_o) \in Z$ è punto di massimo assoluta per f su Z
 se e solo se (per definizione)
 $\forall (x, y) \in Z \quad f(x, y) \leq f(x_o, y_o).$
3. $(x_o, y_o) \in Z$ è punto di minimo relativo per f su Z
 se e solo se (per definizione)
 $\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap Z \quad f(x, y) \geq f(x_o, y_o).$
4. $(x_o, y_o) \in Z$ è punto di minimo assoluto per f su Z
 se e solo se (per definizione)
 $\forall (x, y) \in Z \quad f(x, y) \geq f(x_o, y_o).$

Considero ora una condizione necessaria perchè un punto sia di massimo o di minimo assoluto o relativo vincolato.

Teorema 9.5.3 (del moltiplicatore di LAGRANGE) Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, X aperto.

Sia $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $Z = \{(x, y) \in X : g(x, y) = 0\}$, $Z \neq \emptyset$, Z regolare.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(X)$ e sia $(x_o, y_o) \in Z$ di massimo o di minimo assoluto o relativo per $f|_Z : Z \rightarrow \mathbb{R}$, cioè $\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap Z \quad f(x, y) \leq f(x_o, y_o)$ oppure $f(x, y) \geq f(x_o, y_o)$.

Tesi:

$\exists \lambda_o \in \mathbb{R}$ tale che si abbia:

$$\begin{cases} f_x(x_o, y_o) = \lambda_o g_x(x_o, y_o) \\ f_y(x_o, y_o) = \lambda_o g_y(x_o, y_o) \end{cases}$$

Il numero reale λ_o prende il nome di moltiplicatore di Lagrange di f in (x_o, y_o) su Z .

Dimostrazione:

Poiché Z è regolare, $g \in C^1(X)$ ed inoltre risulta $(g_x(x_o, y_o), g_y(x_o, y_o)) \neq (0, 0)$.

Sia $g_y(x_o, y_o) \neq 0$, per il teorema del DINI $\exists \delta > 0$ ed $\exists |u : [x_o - \delta, x_o + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1([x_o - \delta, x_o + \delta])$ tale che $u(x_o) = y_o$, $(x, u(x)) \in X \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$ e $g(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$, cioè $(x, u(x)) \in Z \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta]$.

Considero ora la funzione:

$$h : [x_o - \delta, x_o + \delta] \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = f(x, u(x)) \quad \forall x \in [x_o - \delta, x_o + \delta].$$

Tale funzione h ha in x_o , per ipotesi, un punto di massimo o di minimo assoluto o relativo.

Poiché f ed u sono di classe C^1 , anche h , per il teorema delle funzioni composte, ha la stessa regolarità. Quindi, per il teorema di Fermat, si ha $h'(x_o) = 0$.

Per il teorema delle funzioni composte si ha $h'(x_o) = f_x(x_o, y_o) + f_y(x_o, y_o)u'(x_o) = 0$.

Essendo poi $u'(x_o) = -\frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)}$, si ha:

$$f_x(x_o, y_o) + f_y(x_o, y_o)\left(-\frac{g_x(x_o, y_o)}{g_y(x_o, y_o)}\right) = 0.$$

Quindi:

$$f_x(x_o, y_o)g_y(x_o, y_o) - f_y(x_o, y_o)g_x(x_o, y_o) = 0.$$

Questa condizione dice che i due vettori gradiente del piano $\nabla f((x_o, y_o)) = (f_x(x_o, y_o), f_y(x_o, y_o))$ e $\nabla g((x_o, y_o)) = (g_x(x_o, y_o), g_y(x_o, y_o))$ sono sulla stessa retta passante per l'origine, cioè sono allineati.

Quindi esiste $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $f_x(x_o, y_o) = \lambda_o g_x(x_o, y_o)$ ed $f_y(x_o, y_o) = \lambda_o g_y(x_o, y_o)$ che è la tesi.

Se risulta $g_y(x_o, y_o) = 0$ allora, per ipotesi, si ha: $g_x(x_o, y_o) \neq 0$.

La dimostrazione in tal caso è analoga a quella appena esposta. $\diamond$

La condizione appena provata è ovviamente solo necessaria perchè un punto sia di massimo o di minimo assoluto o relativo. Inoltre essa si può sintetizzare facendo ricorso alla nozione di funzione lagrangiana nel modo seguente.

Osservazione 9.5.4 *Siano assegnati $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $X \neq \emptyset$, X aperto.*

Sia $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $Z = \{(x, y) \in X : g(x, y) = 0\}$, $Z \neq \emptyset$, Z regolare.

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(X)$ e sia $(x_o, y_o) \in Z$ di massimo o di minimo assoluto o relativo per $f|_Z : Z \rightarrow \mathbb{R}$, cioè $\exists I \in \mathcal{I}(x_o, y_o) : \forall (x, y) \in I \cap Z \quad f(x, y) \leq f(x_o, y_o)$ oppure $f(x, y) \geq f(x_o, y_o)$.

Le condizioni appena dimostrate si possono leggere come condizioni di stazionarietà della funzione, detta Lagrangiana, definita nel modo seguente.

$$L : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Quindi esiste $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} f_x(x_o, y_o) - \lambda_o g_x(x_o, y_o) = 0 \\ f_y(x_o, y_o) - \lambda_o g_y(x_o, y_o) = 0 \\ g(x_o, y_o) = 0. \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} L_x(x_o, y_o, \lambda_o) = 0 \\ L_y(x_o, y_o, \lambda_o) = 0 \quad \diamond \\ L_\lambda(x_o, y_o, \lambda_o) = 0. \end{cases}$$

In microeconomia si esamina il comportamento razionale di un consumatore che vuole massimizzare la sua utilità in presenza di alcuni vincoli di bilancio che sembrano naturali.

Nel modello si suppone che il consumatore possa scegliere di acquistare due beni e che possa spendere al più m unità di poste monetarie per acquistarli. Si suppone, per semplicità, che i prezzi dei due beni siano costanti e che $p > 0$ e $q > 0$ siano rispettivamente il prezzo del primo e del secondo bene. Se il consumatore acquista x unità del primo bene spende px unità di poste monetarie, analogamente se acquista y unità del secondo bene qy é la relativa spesa. Complessivamente quindi la sua spesa é $px + qy$. Ipotezzando poi che la spesa non ecceda la

disponibilità m si deve avere $px + qy \leq m$. Se invece il consumatore è disposto ad indebitarsi allora può anche essere $px + qy > m$.

Quindi il consumatore è interessato a massimizzare la sua funzione di utilità f con i vincoli $x \geq 0$, $y \geq 0$ e che si abbia anche $px + qy \leq m$.

Ipotizziamo ora che la funzione di utilità del consumatore sia la funzione di Coob-Douglas. Essa è definita assegnando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ essa è ha la seguente espressione:

$$f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[\quad f(x, y) = x^\alpha y^\beta.$$

È evidente che la funzione data è non negativa e ha come punti di minimo assoluti quelli dei semiassi nei quali il valore è 0. Inoltre nel quadrante aperto, cioè in ogni punto (x, y) con $x > 0$ ed $y > 0$, essa è evidentemente positiva ed in tali punti ammette derivate parziali date da:

$$f_x(x, y) = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \quad \text{ed} \quad f_y(x, y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1} \quad \forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$$

Naturalmente esse non si annullano dove son definite e quindi la funzione data non ha punti di massimo né di minimo relativi o assoluti.

Se il consumatore accetta questa funzione come utilità da massimizzare deve esaminarla nell'insieme delle coppie ammissibili che sono date da

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, px + qy \leq m\}$$

Per quanto detto prima il punto di massimo, che esiste per il teorema di Weierstrass, si trova sulla ipotenusa del triangolo. Per determinarlo occorre allora fare uso del teorema del moltiplicatore di Lagrange.

La funzione Lagrangiana del problema è:

$$L(x, y, \lambda) = x^\alpha y^\beta + \lambda(m - px - qy).$$

Il punto di massimo, detto anche di ottimo, si determina trovando x, y, λ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} y^\beta - \lambda p = 0 \\ \beta x^\alpha y^{\beta-1} - \lambda q = 0 \\ m - px - qy = 0 \end{cases}$$

La soluzione è data da

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha m}{p(\alpha+\beta)} \\ y = \frac{\beta m}{q(\alpha+\beta)} \\ \lambda = \frac{\alpha+\beta}{m} \left(\frac{\alpha m}{p(\alpha+\beta)} \right)^\alpha \left(\frac{\beta m}{q(\alpha+\beta)} \right)^\beta. \end{cases}$$

La seguente coppia di quantità

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha m}{p(\alpha+\beta)} \\ y = \frac{\beta m}{q(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

rappresenta la coppia che rispetta il vincolo di bilancio e che massimizza l'utilità del consumatore. Per questo motivo si chiama, di solito, la funzione domanda.

Si può notare che la quantità ottima x è strettamente crescente rispetto alla posta monetaria m , è strettamente decrescente rispetto al prezzo p e non dipende dal prezzo q dell'altro bene. Analoga considerazione vale per la quantità ottima y .

Utilizzando la funzione lagrangiana si può dare una condizione sufficiente perchè il punto sia di massimo o di minimo relativo.